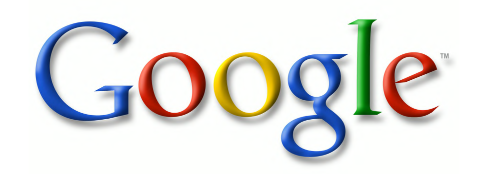
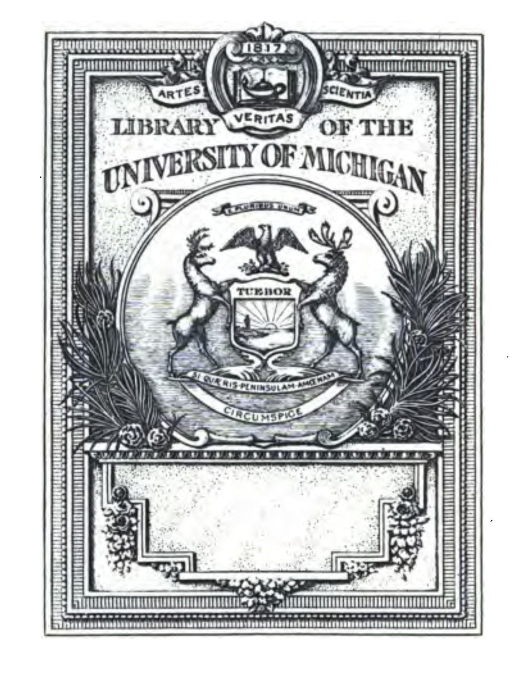


Math.
vols. 1-7 [vol. 1 lacks T.P.; vol. 7 mutd.)



27.50

Graham



CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

ET PHYSIQUE.

ROYAUME DES PAYS-BAS.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

ET PHYSIQUE,

PUBLIÉE

PAR MM. GARNIER, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ET D'ASTRONOMIE A L'UNIVERSITÉ DE GAND, ET QUETELET, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET D'ASTRONOMIE A L'ATHÉNÉE DE BRUXELLES; MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES.

TOME PREMIER.



A GAND,

DE L'IMPRIMERIE D'H. VANDEKERCKHOVE FILS, RUE COURTE-DES-CHEVALIERS.

1825.

LISTE DE MM. LES SOUSCRIPTEURS

A la Correspondance Mathématique et Physique.

MM.

Van Ewyck, Administrateur-général de l'instruction publique, à La Haye.

Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles.

Le prince De Gavre, grand-maréchal du palais, président de l'Académie royale de Bruxelles.

Van Utenhoven, membre des Etats-Généraux, à Jutphas, près d'Utrecht.

Pagani, professeur de mathématiques.

La bibliothèque de l'Académie.

INSTRUCTION PUBLIQUE.

Université de Leyden.

C. Ekama, professeur dans la faculté des sciences.

Simon Speyert Vander Eyk, id.

Jacob de Gelder, id.

J. Nieuwenhuis, id.

J. Van Voorst, professeur de théologie et premier bibliothécaire.

P. J. Uylenbroek, lecteur dans la faculté des sciences.

G. J. Verdam, docteur en sciences.

P. J. Elout, étudiant.

J. J. Ermerins, id.

B. Donker Curtius, id.

J. D. F. Van Hogendorp, id.

H. Ter Kuile Hoedemaker, id.

C. W. O. Van Dorsser, id.

C. F. J. De Constant Rebecque, id.

Université d'Utrecht.

G. Moll, professeur dans la faculté des sciences.

J. F. Schröder, professeur.
A. de Wit, étudiant.
G. Simons, candidat méd.
G. Van Galen, étudiant en math. et phil. nat.
G. J. Mulder, cand. méd.
A. H. Metelerkamp, étud. juris.
W. Wenckeback, cand. en math. et phil. nat.
A. J. Rueb Chrz., étudiant en lettres.
La bibliothèque.

Université de Groningen.

Brouwer, professeur.
La bibliothèque.

Université de Liége.

Vanderheyden, professeur dans la faculté des sciences.
Van Rees, id.
Delvaux, id.
Dandelin, professeur extr., membre de l'Académie de Bruxelles.

Université de Louvain.

Goëbel, professeur de mathématiques.
Glösener, prof. extr.
Le Baron *De Reiffenberg,* prof. extr. dans la faculté des lettres et de l'Académie des sciences et lettres de Bruxelles.
La bibliothèque.
Hayez (Edouard), étudiant.

Université de Gand.

Raoul, professeur dans la faculté des lettres.
Van Breda, id. d'histoire naturelle.
La bibliothèque.
Verhulst, docteur en sciences.
Mareska, étud.
Renard, id.
Manderlier, id.
Decock, id.

Ecole Militaire de Delft.

Scheer de Lionastre, lieutenant-colonel d'artillerie.

Bibliothèque. (2 abonn.)

L. Hye, élève.

Athénées.

Le Maire, professeur de mathématiques et de physique, à l'Athénée royal de Tournay.

Smolderen, id. à l'Athénée royal d'Anvers.

J. Kumps, id. au même Athénée.

Delannoy, id. à l'Athénée de Bruges.

Noël, principal et professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Luxembourg.

Perrin, professeur de mathématiques supérieures et principal de l'Athénée royal de Namur.

Cauchy, ingénieur des mines de I.re classe, prof. de minéralogie au même Athénée et membre de l'Académie royale des sciences et lettres de Bruxelles.

Ermerins, prof. de mathématiques à l'Athénée de Franeker.

Diricx, prof. de math. élémentaires à l'Athénée royal de Bruxelles.

Simons, maître d'étude à l'Athénée royal de Maestricht.

Colléges.

Timmermans, docteur en sciences et professeur de mathématiques supérieures au Collége royal de Gand.

Herden, prof. de mathématiques au même Collége.

Forir, prof. de mathématiques au Collége royal de Liége,

Guillery, principal du Collége de Charleroy.

Institutions particulières.

Megank, à Nevele.

Lemans, instituteur en mathématiques à Amsterdam.

Pelletier, instituteur à Bruges, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, docteur en sciences.

De Brabant, à Tournay.

Baron, fauxbourg S.t-Josse ten Noode, près Bruxelles.

Dans les villes du Royaume.

R. C. Van Tuyl de Serooskerken, juris utriusque et philosophiæ naturalis doctor, Amsterdam.

Vantet Wode, libraire à Amsterdam.
Bato Sluys, 1.er lieutenant près de l'artillerie de la milice nationale, à Bergen-op-Zoom.
Dotrenge, membre des états-généraux, Marché-au-Bois, à Bruxelles.
Walter (*Victor*), commis-d'état près le ministre de l'instruction publique, plaine S.te-Gudule, à Bruxelles.
Barré, homme de lettres, à Bruxelles.
Drapier, naturaliste, place des Wallons, à Bruxelles.
Bibliothèque de Bruxelles.
Crick (*Chrétien*), à Bruxelles.
Vander Maelen, négociant, à Bruxelles.
W. H. Cost Jordens, avocat à Deventer.
Van Gorkum, colonel des reconnaissances militaires, à Gand.
Léopold Van Alstein, à Gand.
La société d'histoire naturelle et de chimie, à Groningen.
F. A. Egter Van Wisseker ke, 1.er lieulenant d'infanterie, attaché au département de la guerre, à La Haye.
Lobatto, employé au département de l'intérieur, de l'instruction publique et du waterstaat, à La Haye.
Huguenin, général-major, directeur de la fonderie royale de Liége.
W. A. Bake, major d'artillerie, sous-directeur de la fonderie royale, à Liége.
Lelyveld, capitaine du Génie, à Liége.
Kynsma, capitaine du génie, à Maestricht.
Tarte, aspirant-ingénieur, à Maestricht.
M.me veuve *Le Febvre Renard*, ci-devant *Collardin*, à Maestricht.
Fischer, 1.er lieutenant à la compagnie d'école de la 4.e division d'infanterie, à Tournay.
A. Van Beek, à Utrecht
W. D. Koopman, à Utrecht.
Devleeshouwer, arpenteur-géomètre, à Vilvorde.

En France.

Delezenne, professeur de physique, à Lille.
Gergonne, rédacteur des Annales mathématiques de Nîmes.
Le baron *De Ferussac*, éditeur du Bulletin universel de Paris.
Hachette, ancien prof. à l'Ecole Polytech. de la faculté des sciences de Paris.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

Prospectus.

TANDIS qu'il existe dans ce royaume des journaux périodiques relatifs à la Médecine, à l'Agriculture, aux Lettres et aux Arts, qui se soutiennent avec plus ou moins de succès, il est remarquable qu'on n'y trouve aucun recueil consacré aux sciences Mathématiques et Physiques, qui permette à ceux qui les cultivent, d'établir entre eux un commerce scientifique, et qui, entre autres avantages, offre celui de garantir à chacun la propriété et la prompte publicité des résultats de ses recherches. Nul doute que ceux qui aiment et qui cultivent les sciences, n'applaudissent à l'idée d'une pareille entreprise et qu'ils ne s'empressent de seconder nos efforts.

Le Journal dont nous hazardons le I.er numéro (1), offrira, quant aux Mathématiques, deux grandes divisions : l'une consacrée aux Mathématiques élémentaires et transcendantes pures et appliquées; l'autre à la revue des travaux scientifiques.

La première contiendra 1.° un choix des meilleures solutions des questions qui seront proposées à la fin de chaque numéro; l'analyse de celles qui, sans être aussi satisfaisantes, ont pourtant quelque mérite; des observations propres à mettre les jeunes auteurs sur la voie de solutions plus générales ou plus élégantes, que nous consignerons

---

(1) Qui ne doit être considéré que comme un numéro d'annonce.

dans les numéros suivans, en les rattachant aux premières: enfin les recherches qui ont pour objet la simplification de quelques points des élémens, et qui pourront tourner à l'amélioration des livres classiques publiés dans ce royaume; 2.° les travaux scientifiques de MM. les Professeurs et sur-tout ceux qui se rapportent à des applications soit de la géométrie, soit de l'analyse à l'astronomie et à la physique, et qui seront classés sous des titres qui en rappellent l'objet.

La seconde section de ce Journal sera réservée, 1.° aux travaux scientifiques des Élèves des Universités, c'est-à-dire, à l'analyse des thèses et des concours sur les sciences; 2.° à celle des pièces envoyées aux Sociétés savantes du royaume, en réponse aux questions qu'elles proposent annuellement, et des mémoires des Membres de ces Sociétés; 3.° aux éloges des Géomètres tant anciens que modernes qui ont honoré notre pays; 4.° aux programmes des questions scientifiques proposées par les Sociétés savantes; 5.° aux annonces et analyses des ouvrages, et particulièrement de ceux publiés dans le pays.

Comme les sciences naturelles comprennent quelques branches qui se lient aux mathématiques et à la physique, nous accueillerons avec reconnaissance tout ce qui leur sera relatif, ainsi que les observations qui tendront à l'amélioration de notre Recueil, soit quant à la forme, soit quant au fonds.

Les Éditeurs de ce Journal, MM. Garnier, Professeur de Mathématiques et d'Astronomie à l'Université de Gand, et Quetelet, Professeur de Mathématiques, de Physique et d'Astronomie à l'Athénée de Bruxelles, s'astreignent à la seule obligation de publier tous les ans un volume, format in-8.°, d'environ 24 à 25 feuilles, y compris les planches, par livraison de deux, trois ou quatre feuilles, à raison de la quantité et de la qualité des matériaux qu'ils auront reçus.

Le prix de l'abonnement est de *sept florins* des Pays-Bas, *par an*. On souscrit à Gand, chez H. Vandekerckhove fils, Imprimeur-Libraire, rue Courte-des-Chevaliers, n.° 10; et à Bruxelles, chez Berthot, Libraire, Marché-au-Bois, près du cabinet de lecture. Les Mémoires, Notices, les Lettres et Réclamations, seront adressés, *port franc*, aux Éditeurs ou aux Libraires ci-dessus désignés.

N.[a] Nous invitons les Personnes qui nous adresseront des Mémoires avec des figures, à les dessiner avec soin et à les disposer comme elles doivent l'être, afin que le lithographe n'éprouve aucun embarras dans la confection des planches.

LISTE DE MM. LES ABONNÉS.

MM.

Van Ewyck, Administrateur général de l'instruction publique, à La Haye.

L'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles

Le Prince De Gavre, grand maréchal du palais, président de l'Académie royale de Bruxelles.

Van Utenhoven, membre des Etats-Généraux, et de l'Académie, à Jutphas, près d'Utrecht.

Dandelin, membre de l'Académie, 1.er lieutenant au corps du génie, à Venlo.

Université de Leyden.

C. Ekama, professeur.
Simon Speyert Vander Eyk, professeur.
J. Nieuwenhuis, professeur.
J. Van Voorst, professeur et premier bibliothécaire.
Jacob De Gelder, professeur extraord.
P. J. Uylenbroek, lecteur dans la faculté des sciences.
P. J. Elout, étudiant.
J. J. Ermerins, id.
B. Donker Curtius, id.
G. J. Verdam, id.
J. D. F. Van Hogendorp, id.
H. Ter Kuile Hoedemaker, id.
C. W. O. Van Dorsser, id.
C. F. J. De Constant Rebecque, id.

Université d'Utrecht.

G. Moll, professeur.
J. F. Schroder, idem.
A. De Wit, étudiant.
G. Simons, candidat méd.
P. Van Galen, étudiant en math. et phil. nat.
G. J. Mulder, cand. méd.
A. H. Metelerkamp, étud. juris.
W. Wenckebach, cand. en math. et phil. nat.
A. J. Rueb Chrz., étudiant en lettres.

Université de Liége.

Vanderheyden, professeur.
Delvaux, professeur de physique et chimie.
Van Rees, professeur ext. de mathématiques.

Université de Louvain.

Göbel, professeur de mathématiques.

MM.

Le Baron *De Reiffenberg*, profess. extraord. (2 abonn.)
Glösener, lecteur dans la faculté des sciences.

Université de Gand.

Raoul, professeur.
Van Breda, id. d'histoire naturelle.
Verhulst, élève en sciences.
J. Mareska, idem.
Renard, idem.
Manderlier, idem.

L'École d'artillerie et de génie, à Delft.

Bibliothèque. (2 abonn.)

Athénées royaux.

Le Maire, prof. de math. et de phys. à l'athénée royal de Tournay.
Smolderen, professeur de mathématiques à l'athénée royal d'Anvers.
Jos. Kumps, idem.
Ed. Delannoy, profess. de math. et de phys. à l'ath. royal de Bruges.
Noel, professeur de mathématiques à l'athénée de Luxembourg.

Colléges royaux.

Alexis Timmermans, professeur au collége royal de Gand.
Herden, professeur de mathématiques audit collége.
H. Forir, professeur de mathématiques au collége royal de Liége.

MM.

Dotrenge, membre des états-généraux, Marché-au-Bois, à Bruxelles.
Huguenin, général-major, directeur de la fonderie royale de canons, à Liége.
W. A. Bake, major d'artillerie, sous-directeur de la fonderie royale de canons, à Liége.
Lelyveld, capitaine du génie, à Liége.
Bato Sluis, 1.er lieutenant près de l'artillerie de la milice nationale, à Bergen-op-Zoom.
F. A. Egter Van Wissekerke, 1.er lieutenant d'infanterie, attaché au département de la guerre, à La Haye.
A. Van Beek, à Utrecht.
W. D. Koopman, à Utrecht.
R. Lobatto, employé au département de l'intérieur, de l'instruction publique et du waterstaat, à La Haye.
D vleeshouwer, arpenteur-géomètre, à Vilvorde.
Mad. veuve Le Febvre Renard, ci-devant *Collardin*, à Maestricht.
B. Megank, instituteur, à Nevele.
Vander Maelen, négociant, près du poids de la ville, à Bruxelles.

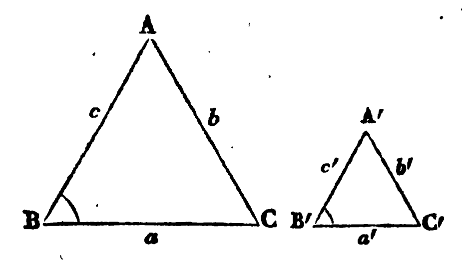
N.a Cette Liste sera continuée dans les n.os suivans.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

THEORÈME.

Deux triangles qui ont deux côtés respectivement proportionnels, et l'angle opposé à l'un de ces côtés, égal de part et d'autre, sont semblables, si l'angle opposé à l'autre côté, est de même espèce dans chacun ; c'est-à-dire, si ces angles sont tous deux aigus ou obtus.



Soient a, b, c les côtés de l'un des triangles, et A, B, C les angles respectivement opposés; a', b', c' les côtés du second triangle, et A′, B′, C′ les angles opposés : supposons, conformément à l'énoncé, qu'on ait

$$(1)\ldots\ldots\ a : b = a' : b'\ ;\quad A = A'\ldots\ldots\ (2)$$

et B de même espèce que B′ : ces deux triangles donnent respectivement (Trig.)

$$a : b = \sin. A : \sin. B$$
$$a' : b' = \sin. A' : \sin. B'.$$

Donc, en vertu de (1),

$$\sin. A : \sin. B = \sin. A' : \sin. B',$$

mais, d'après (2), on a $\sin. A = \sin. A'$; donc $\sin. B = \sin. B'$: on peut donc faire l'une des deux hypothèses : $B = B'$, $B = 180 - B'$, dont la première seule est admissible, quand les angles B et B' sont de même espèce : ainsi les deux triangles sont équiangles et conséquemment semblables. Ce caractère de similitude n'est pas énoncé dans les traités de Géométrie. (*Art. extrait.*) J. G. G.

Abréviation dans la solution d'un cas de la Trigonométrie plane.

Ce cas est celui où étant donnés deux côtés d'un triangle rectiligne, et l'angle compris, on veut calculer le troisième côté.

Les trois côtés du triangle sont a, b, c; les angles opposés à ces côtés, sont A, B et C : les données sont a, b et l'angle compris C. On a la formule connue

$$a + b : a - b = \text{tang.}\left(\frac{A+B}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

de laquelle on conclut, au moyen des tables, les angles A et B; il reste donc à trouver le côté c opposé à l'angle C. Ordinairement, on a recours à l'une de ces proportions

$$\sin. A : \sin. C = a : c; \quad \sin. B : \sin. C = b : c;$$

mais on reconnaîtra aisément l'avantage de leur substituer l'une de celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} \cos.\left(\frac{A-B}{2}\right) : \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right) = a + b : c \\ \sin.\left(\frac{A-B}{2}\right) : \sin.\left(\frac{A+B}{2}\right) = a - b : c \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

qui permet de conserver les mêmes angles $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\left(\frac{A-B}{2}\right)$, et d'employer aussi log. $(a+b)$ ou log. $(a-b)$. Il s'agit de les démontrer. On a

$$\sin. A : a = \sin. B : b, \text{ d'où } \sin. A : \sin. B = a : b,$$

donc

$$\sin. A + \sin. B : \sin. B = a + b : b$$

et

$$\sin.A + \sin.B : a + b = \sin.B : b = \sin.C : c \ldots\ldots; \quad (2)$$

On a de même

$$\sin.A - \sin.B : a - b = \sin.B : b = \sin.C : c \ldots\ldots \quad (3)$$

Or, en posant le rayon $=1$, on sait que

$$\sin.A + \sin.B = 2 \sin.\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos.\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin.A - \sin.B = 2 \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin.\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin.C = \sin.(A+B) = \sin.\left[\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{A+B}{2}\right)\right] = 2 \sin.\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Substituant dans (2) et (3), distraction faite du rapport intermédiaire $\sin.B : b$, et faisant la division respectivement par $2 \sin.\left(\frac{A+B}{2}\right)$, et par $2 \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)$, on est conduit aux formules (1).

J'étais tombé de mon côté sur les formules trouvées par Monsieur WALLACE, membre de la Société royale d'Édimbourg, qui les a consignées dans les Transactions de cette Société, tom. X, pag. 168, ann. 1824, où il a donné, p. 148, des formules au moyen desquelles on peut déduire les logarithmes des lignes trigonométriques, les uns des autres; mais comme elles conduisent à des calculs arithmétiques plus longs que ceux qui résultent de l'emploi de la méthode ordinaire, nous nous dispenserons de les faire connaître.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Problême d'Arithmétique.

Deux vases A *et* B *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis l'un et l'autre d'un mélange d'eau et de vin, dont la proportion est connue pour chaque vase, ce qui forme l'état initial; on a deux mesures égales dont la contenance commune est* c *et que*

l'on remplit en les plongeant séparément dans chacun des deux vases; après quoi on verse dans l'un des vases la quantité c *de liquide tiré de l'autre : on réitère la même opération* n *fois successivement, et on demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase?*

Désignons par X, X′ et X″ les quantités d'eau qui restent dans le vase A après trois opérations consécutives quelconques, et par Y, Y′ et Y″ les quantités correspondantes d'eau, qui se trouvent dans le vase B.

Dans la première opération, on extrait du vase A, une quantité d'eau exprimée par le quatrième terme de la proportion

$$a : c = X : z = \frac{c}{a} X$$

et pareillement de B une quantité d'eau représentée par $\frac{c}{b}$ Y. Ainsi la quantité d'eau X′ due à la première opération, sera représentée par

$$X' = X - \frac{c}{a} X + \frac{c}{b} Y \dots\dots\dots\dots (1);$$

on aura pareillement

$$X'' = X' - \frac{c}{a} X' + \frac{c}{b} Y' \dots\dots\dots\dots (2)$$

on a d'ailleurs

$$X + Y = X' + Y' \dots\dots\dots\dots (3)$$

Eliminant Y et Y′ entre les équations (1), (2) et (3), on aura cette relation

$$X'' = \left(2 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) X' - \left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) X; \quad (4)$$

qui montre que les quantités d'eau successives X, X′ et X″, contenues dans le vase A, forment *une suite recurrente du second ordre*, qui a pour *échelle de relation*

$$+\left(2 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right), \; -\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right):$$

en sorte qu'il ne s'agit plus que de trouver le terme général du développement de la *fraction génératrice* qui a pour dénominateur

$$1 - \left(2 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) x + \left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) x^2$$

et on aura pour cette fraction

$$(5)\ldots\quad \frac{A+Bx}{1-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x^2}=\frac{A+Bx}{(1-x)\left[1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x\right]}$$

qu'on peut décomposer dans les deux fractions simples

$$\frac{M}{1-x}+\frac{N}{1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x}.$$

Or les termes généraux correspondans des développemens dus à ces fractions partielles, sont

$$Mx^n \text{ et } N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n x^n$$

et conséquemment

$$\left[M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n\right]$$

sera le terme général du développement de la fraction (5). On aura donc

$$X''=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n$$

ou

$$X=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n\ldots\ldots\ (6)$$

X étant, comme X″, un terme qui dépend des deux précédens, suivant la même loi. M et N sont ici deux constantes qu'il s'agit de déterminer d'après l'état initial du mélange dans les deux vases, ce qui revient évidemment à déduire de l'etat primitif, un second état d'après les données de la question. Or, si α et β sont les quantités d'eau qui se trouvaient initialement dans les vases A et B, il restera dans le vase A, après la première opération, une quantité d'eau qui, d'après (1), sera représentée par

$$\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta\ ;$$

il faut donc qu'en faisant successivement dans la formule (6),

$$\left.\begin{array}{r} n=0 \\ n=1 \end{array}\right| \text{ on ait } \left|\begin{array}{l} X=\alpha \\ X=\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha=M+N,\ \alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)$$

et de là

$$M=a\frac{\alpha+\beta}{a+b},\ N=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}$$

et conséquemment

$$X=a\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n \dots (7)$$

Si, dans l'état initial du mélange, les quantités d'eau contenues dans les deux vases, sont respectivement proportionnelles aux capacités de ces vases, on a

$$\alpha:\beta=a:b,\ \text{d'où}\ \alpha b-\beta a=0\ \text{et}\ \alpha+\beta:\alpha=a+b:a$$

et partant

$$X=a\frac{\alpha+\beta}{a+b}=\alpha:$$

ainsi, dans ce cas particulier, quelques multipliées que soient les opérations, l'état des deux mélanges restera le même.

D'après ce que nous avons dit, on trouvera facilement

$$Y=b.\frac{\alpha+\beta}{a+b}-\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n \dots (8)$$

Et, en effet,

$$X+Y=\alpha+\beta$$

Soient α' et β' les quantités initiales de vin contenues dans les deux vases; x et y les quantités de vin qui restent après n opérations: on trouvera de la même manière

$$x=a\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}+\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n \dots (9)$$

$$y=b\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}-\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n \dots (10)$$

On a, en effet,

$$X+x=a\left[\frac{(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')}{a+b}+\frac{b(\alpha+\alpha')-a(\beta+\beta')}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n\right.$$

ce qui revient à

$$X+x=a,$$

en observant que $\alpha+\alpha'=a$, $\beta+\beta'=b$. On trouve de même

$$Y+y=b,\ x+y=\alpha'+\beta'.$$

Maintenant $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ étant deux fractions positives, nécessairement leur somme $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ est comprise entre o et 2, et par conséquent $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$ est une fraction comprise $+1$ et -1 : donc les valeurs de X, Y, x et y tendent à se réduire au premier terme, à mesure que n devient plus grand, et elles y tendent de manière que X et x soient toujours au-dessus, et Y et y toujours au-dessous, si cependant l'on a $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}<1$, ou $c<\frac{ab}{a+b}$; tandis qu'au contraire X et x, Y et y se trouvent alternativement au-dessus ou au-dessous de cette limite, pour $c>\frac{ab}{a+b}$. Pour la relation intermédiaire $c=\frac{ab}{a+b}$ qui répond à $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=0$, les valeurs X, x, Y, y atteindraient leurs limites à la première opération. Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette discussion, en tenant compte des inégalités $\frac{\alpha}{\beta}>$ ou $<\frac{a}{b}$, et en supposant aussi que les quantités a et b soient incommensurables.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

---

(1) On peut voir (1.re section de mon Algèbre, chez *Demat*, libraire, à Bruxelles et *Vandekerckhove*, libraire à Gand) la solution de cette question. *Deux vases* A *et* B *contenant des volumes connus* V *et* V' *de mélanges de plusieurs liquides, dont le nombre ainsi que les proportions sont inconnus dans chaque vase, construire deux vases plus petits et d'une même capacité, tels qu'en les emplissant chacun dans chacun des vases donnés, et versant ensuite dans* A *le liquide extrait de* B, *et dans* B *le liquide extrait de* A, *les mélanges de liquides dans les vases* A *et* B, *soient exactement de même nature après cette seule opération.* En appelant x la capacité des deux petits vases égaux, on trouve $x=\frac{V\times V'}{V+V'}$.

ASTRONOMIE.

Sur le mouvement moyen des planètes.

Delambre et *Biot*, dans leurs Traités d'Astronomie, ont donné une méthode expéditive pour calculer par trois observations, trois élémens de l'orbite d'une planète : mais ces Astronomes, indépendamment de l'inclinaison de l'orbite et de la position des nœuds, regardaient comme connu le mouvement moyen de l'astre : *De la Lande*, en partant des mêmes données, résolvait le même problême par les fausses positions.

En supposant inconnu le mouvement moyen, nous sommes parvenus à la formule suivante qui le détermine d'une manière très-simple.

Soient t, t', t'', t''' les instans des observations, comptés d'une époque quelconque;

v, v', v'', v''' les longitudes de la planète, réduites au plan de son orbite, à ces instans.

Et faisons, pour abréger,

$$t'-t=q;\ t''-t=q';\ t'''-t=q'':$$
$$v'-v=p;\ v''-v=p';\ v'''-v=p'':$$
$$2\sin.\tfrac{1}{2}p'.\sin.\tfrac{1}{2}p''.\sin.\tfrac{1}{2}(p'-p'')=m$$
$$2\sin.\tfrac{1}{2}p''.\sin.\tfrac{1}{2}p\ .\sin.\tfrac{1}{2}(p''-p)=m'$$
$$2\sin.\tfrac{1}{2}p\ .\sin.\tfrac{1}{2}p'.\sin.\tfrac{1}{2}(p-p')=m''$$

le mouvement moyen aura pour valeur approchée

$$x=\frac{pm+p'm'+p''m''}{qm+q'm'+q''m''}.$$

Cet élément étant ainsi déterminé, le reste du calcul s'achève comme l'indiquent les astronomes que nous avons cités plus haut.

En appliquant la formule précédente à un exemple particulier dont les données nous ont été fournies par M.r *Bouvard* qui a bien voulu

les extraire pour nous des registres de l'observatoire de Paris, nous sommes parvenus à un résultat numérique très-satisfaisant (1).

A. Q.

Relativement au mouvement parabolique des comètes, on peut déterminer le temps employé à parcourir un arc quelconque de la parabole, par une formule simple qui ne renferme que la somme des rayons vecteurs qui répondent aux deux extrémités de l'arc, et la corde qui soutend cet arc : si l'on désigne par $t-t'$ le temps employé à décrire cet arc, par r et r' les rayons vecteurs qui répondent à ses extrémités, par c la corde qui soutend le même arc, et si l'on pose, pour abréger, $r+r'=r''$, cette formule est la suivante

$$t'-t=\frac{(r''+c)^{\frac{3}{2}}-(r''-c)^{\frac{3}{2}}}{6\mu}$$

μ étant une constante. Cette expression très-élégante a été donnée d'abord par *Euler* dans le VIIe volume des *Miscellanea Berolinensis* : on la trouve aussi dans l'ouvrage de *Lambert*, ayant pour titre : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates* : ce grand géomètre l'a étendue depuis à l'ellipse et à l'hyperbole; mais il serait bon de chercher à la déduire du *IIIe Livre des Principes de la Philosophie naturelle* (2), en traduisant en analyse la construction par laquelle *Newton* détermine la vitesse qui ferait parcourir uniformement la corde d'un arc de parabole, dans le même temps que l'arc serait parcouru par une comète, (3) : du théorème proposé, et du lemme IX de l'ouvrage cité, on tire la valeur de ce dernier rayon, exprimée par la corde et par la somme des rayons vecteurs qui répondent à ses deux extrémités.

J. G. G.

---

(1) Ces calculs et les développemens de la formule, se trouvent consignés dans une note qui paraîtra dans le troisième volume des Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles.

(2) Si on consulte la superbe édition *du Livre des Principes*, publiée à *Glasgow*, en 1822, il faudra recourir au IVe vol. pag. 143.

(3) Voyez à la fin du numéro l'énoncé du théorème dont on propose de trouver la démonstration.

Rappeler, autant qu'il est possible, l'Astronomie à la Géométrie descriptive, comme on l'a déjà fait à l'égard des éclipses, est un but que l'un des collaborateurs de la Correspondance, cherchera à atteindre dans les articles qu'il se propose d'insérer sur cette branche de la science, et qui aura l'avantage d'en rendre l'étude accessible et même facile à ceux qui ne sont pas familiarisés avec les parties transcendantes des Mathématiques.

J. G. G.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Un des problèmes les plus importans de l'optique, est celui qui concerne les *Caustiques* produites par la réflexion ou la réfraction des rayons émanés d'un point lumineux; la construction de la plupart de ces courbes, est souvent très-pénible, et leurs équations se résolvent avec difficulté. En suivant attentivement la marche des rayons réfléchis et réfractés, nous sommes parvenus à reconnaître une loi générale qui, en abrégeant les calculs, a l'avantage de faire dépendre tous les phénomèmes de la réflexion et de la réfraction, d'un seul et même principe. Voici comment on pourrait l'énoncer :

Toutes les caustiques sont, en général, des développées : les développantes sont les courbes enveloppes des cercles qui ont pour centres les différents points de la courbe réfléchissante ou réfractante, et pour rayons les distances de ces centres au point lumineux dans le cas de la réflexion, et des longueurs proportionelles à ces distances, dans le cas de la réfraction, le rapport constant étant celui indiqué par le pouvoir réfringent des deux milieux.

Au moyen de ce principe, la théorie des caustiques rentre dans la théorie des courbes enveloppes et des courbes développées : ce qui, dans le plus grand nombre de cas, abrégera singulièrement les calculs et les constructions. Pour ne citer qu'un seul exemple, prenons

celui où des rayons émanés d'un point, sont réfractés par une ligne droite : on sait que la caustique, dans ce cas, est une courbe du sixième dégré (1) tandis que sa développante est une section conique, comme on le verrait par le théorème énoncé précédemment, et comme l'a démontré M.r *Gergonne* dans les *Annales mathématiques*. Or, il sera beaucoup plus simple de considérer les rayons réfractés comme des normales à une courbe du 2.e dégré, que comme des tangentes à une autre du sixième ; cependant ces rayons sont également déterminés en direction dans l'un et l'autre de ces cas.

Cette manière de considérer les caustiques, jette aussi un grand jour sur leurs principales propriétés et surtout sur ce qui concerne leur rectification.

Nous avions communiqué ce théorème ainsi que les diverses propositions qui en résultent, à M. *Gergonne*, éditeur des Annales Mathématiques de Nismes : ce savant Géomètre l'a généralisé de manière à l'étendre au cas où les rayons subissent plusieurs réflexions et réfractions consécutives; voici les énoncées qu'il vient de nous adresser :

« 1.° Si des rayons incidens, situés et dirigés d'une manière » quelconque dans un même plan, sont réfléchis par une courbe » plane située dans ce plan, et si l'on trace une quelconque des » trajectoires orthogonales des rayons incidens, en décrivant de tous » les points de la courbe réfléchissante pris pour centre, des cercles » tangens à cette trajectoire, leur enveloppe sera une des trajec- » toires orthogonales des rayons réfléchis.

» 2.° S'il s'agit de réfraction; au lieu de rendre les cercles tan- » gens à la trajectoire orthogonale des rayons incidens, il faudra » que leurs rayons soient aux distances de leurs centres à cette » trajectoire, dans le rapport constant du sinus de réfraction au » sinus d'incidence. »

A. Q.

---

(1) Voyez *J. De Gelder; Beginselen der differentiaal-integraal-en variatie rekening*. Première partie, pag. 383.

STATISTIQUE.

L'observateur en suivant de près la marche de la nature et en soumettant à un calcul rigoureux jusqu'à ses moindres effets, est parvenu à démêler quelques lois générales et à saisir des rapports éloignés, qui doivent lui faire désirer d'étendre plus loin le cercle de ses connaissances. Peu de sujets surtout doivent l'intéresser plus vivement que les lois de la mortalité parmi les hommes, puisqu'on y a rattaché l'existence de sociétés qui, étant bien dirigées, peuvent devenir de la plus grande utilité, et contrebalancer en quelque sorte les maux trop fréquens occasionnés par d'autres établissemens que tolère la politique et que la morale réprouve.

Le désir de voir se consolider parmi nous de pareilles sociétés, nous a porté à faire des recherches sur la mortalité, et à construire des tables telles que celles dont se servent nos voisins, et telles que celles qui ont été publiées par *Kerseboom*, pour les rentiers viagers de la Hollande : nous aurons occasion par la suite de donner quelques extraits de notre travail; nous nous contenterons pour le moment d'indiquer les résultats auxquels nous sommes parvenus pour les naissances, parcequ'ils nous ont frappé par leur régularité. Ce sujet d'ailleurs vient de faire l'objet d'un mémoire qui a été présenté par le docteur *Baily*, à l'Académie des sciences de Paris (le 14 février 1825). Dans ce mémoire dont on ne connaît encore que des extraits, l'auteur est parvenu à des résultats assez irréguliers, et qui paraissent peu conformes à la marche simple de la nature. Il attribue ces écarts à différens motifs particuliers qui peuvent être plus ou moins bien fondés : c'est ce qu'une plus longue observation pourra seule nous apprendre.

Les résultats que nous allons donner, sont fondés sur des observations faites à Bruxelles pendant l'espace de dix-huit ans; et pour les comparer avec plus de facilité, nous avons représenté par l'unité le nombre moyen des naissances.

ÉPOQUES (1)		RÉSULTATS.
Des naissances.	*De la conception.*	
Janvier	Avril	1,0403
Février	Mai	1,1570
Mars	Juin	1,0991
Avril	Juillet	1,0790
Mai	Août	0,9893
Juin	Septembre	0,9559
Juillet	Octobre	0,9012
Août	Novembre	0,9633
Septembre	Décembre	0,9401
Octobre	Janvier	0,9492
Novembre	Février	0,9679
Décembre	Mars	1,0175

Il résulterait donc de ce tableau que l'époque la plus favorable à la conception, aurait lieu au mois de mai, tandis que l'époque la plus défavorable se trouverait vers la fin d'octobre. Le rapport entre les nombres des conceptions qui se font à ces époques, serait d'environ 5 à 4. La régularité de ces résultats n'est pas moins remarquable que la singulière coïncidence des époques que nous venons d'indiquer, avec celle de l'année où tout ce qui nous entoure, semble également prendre un nouveau degré de force et de vie, ou bien languir pendant quelques instans pour se ranimer encore.

Quand on veut se représenter géométriquement la courbe des naissances, comme celle de la mortalité, on trouve une courbe transcendante infinie qui ressemble beaucoup à la sinusoïde : il faudrait prendre pour abscisses les différentes époques de l'année, et pour ordonnées, les ordonnées de la sinusoïde, plus une quantité

(1) Nous supposons que la grossesse est de neuf mois, et que ses dangers sont les mêmes pour toutes les époques de l'année.

constante égale au nombre moyen qui représente les naissances. On pourrait encore l'assimiler à une courbe fermée dont l'équation polaire serait $\rho = R + \frac{R \sin. \alpha}{m} + \left(\frac{R \sin. \alpha}{m}\right)^2 + \left(\frac{R \sin. \alpha}{m}\right)^3 + \text{etc.}$, R étant le nombre moyen des naissances, α l'arc dont l'année est la circonférence, et m un facteur à déterminer par l'observation, en même-temps que R. Cette dernière manière d'envisager l'ordre des naissances, s'accorderait peut-être mieux avec nos résultats (1).

A. Q.

---

(1) Passons à l'autre extrémité de la vie. M. *Du Villard*, dans son intéressant ouvrage, ayant pour titre : *Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursemens*, pose cette équation de la courbe de mortalité

$$Y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(e^{-x:k} - e^{-x:n}\right).$$

L'illustre *Lambert* a trouvé que celle-ci

$$Y = 1000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left(e^{-x:13,682} - e^{-x:2,43114}\right)$$

donnait avec une précision étonnante, la loi de mortalité pour Londres, x désignant l'âge, et e la base des logarithmes népériens : un léger changement la rendrait propre à représenter la courbe de mortalité dans tout autre pays. Cette équation se compose d'une parabole et de deux logistiques ou logarithmiques. La considération du 1.er terme, a conduit *Lambert* à cette singulière conclusion : que le genre humain mourait de la même manière qu'un vase prismatique ou cylindrique vertical se vide par un très-petit orifice fait à la base : les deux autres termes ont beaucoup de rapport avec l'expression du refroidissement des corps.

Dans un mémoire intitulé : *Théorie nouvelle des sections coniques*, Mém. de l'Ac. de Brux. M. *Quetelet* a démontré que si l'on coupe obliquement un cylindre droit, de manière à produire une ellipse, la surface de ce cylindre développée, donne une sinusoïde ou une courbe qui lui est semblable; or si l'on considère, en même temps, les lois de l'accroissement dans les populations, on pourra se représenter le développement des générations, comme le développement d'un rouleau de papier cylindrique, qui a pour bases d'une part un cercle, et de l'autre une ellipse, chaque tour figurant la révolution d'une année.

Nous placerons ici une remarque propre à faire ressortir l'utilité des courbes dans un genre de spéculations, auquel elles paraissent étrangères. Si l'on dé-

MÉTÉOROLOGIE.

Les Physiciens n'avaient aucune idée exacte de la formation de la rosée, avant la publication de l'ouvrage du docteur *Wels*, traduit de l'anglais par M. *Aug. Tordeux*. Parmi les différentes opinions émises sur la cause de ce phénomène, il y en avait une qui se présentait naturellement, et qui la faisait dépendre du refroidissement de l'air; mais cette explication avait contre elle plusieurs faits, et, en particulier, celui-ci déjà connu du temps d'*Aristote*, que la rosée ne se déposait que pendant les nuits calmes et sereines. Une autre

---

signe par y la valeur d'une somme m payable au bout du temps t, le taux de l'intérêt étant i, on trouve 1.° $y = m(1 - it)$, en prenant l'escompte en-dedans de la somme, et à intérêt simple : 2.° $y = m(1 - i)^t$, en prenant encore l'escompte en-dedans et composant l'intérêt : 3.° $y = \frac{m}{(1+i)^t}$, en prenant l'escompte en-dehors et composant l'intérêt : 4.° $y = \frac{m}{1+it}$, en prenant encore l'escompte en-dehors et l'intérêt simple. Si l'on construit ces équations, en prenant t pour l'abscisse, on trouvera que la première est à la ligne droite ; la seconde et la troisième à des logarithmiques; et la quatrième à une hyperbole entre ses asymptotes. Ces courbes étant construites en grand, on peut, au moyen d'une échelle et d'un compas, répondre à toutes les questions d'intérêt avec autant de précision et plus de célérité que par l'Arithmétique. On pourrait encore construire ces formules par la *spirale d'Archimede* et par les spirales *hyperbolique* et *logarithmique*. Au reste, ces questions pourraient faire la matière d'un écrit assez intéressant qui trouverait place dans ce recueil, et qui prouverait mieux que beaucoup d'autres raisonnemens, que les Mathématiques sont bonnes à quelque chose. Voyez encore sur une question d'intérêt qui se lie à une question de Physique, la note qui termine l'ouvrage ayant pour titre : *Elementa Arithmeticæ, Algebræ et Geometriæ; Gandavi, ex officina Vandekerckhove filii.*

J. G. G.

circonstance également contraire à l'opinion qui attribue la formation de la rosée au refroidissement de l'atmosphère, c'est que tous les corps ne s'en couvrent pas également. Ainsi l'on sait depuis long-temps que les lames métalliques se recouvrent beaucoup moins de rosée, que les lames de papier, de bois, etc. Voyons d'abord quelles sont les circonstances favorables, et quelles sont les circonstances contraires à la production de la rosée.

La rosée ne se dépose en grande quantité que pendant les nuits calmes et sereines; il paraît bien constaté qu'il ne s'en produit jamais sous les influences du vent et d'un ciel couvert, même dans les nuits également calmes et sereines : la rosée ne se précipite pas en quantités égales : tout ce qui augmente l'humidité de l'air, paraît aussi favoriser la production de la rosée : la réunion des circonstances les plus favorables à ce phénomène, se trouve plus souvent au printemps et surtout en automne, qu'en été. La rosée, sous un ciel pur, se forme pendant toute la durée de la nuit : elle est moins abondante entre le coucher du soleil et minuit, qu'entre minuit et le lever. Les métaux polis ne se couvrent pas, en général, de rosée : cette inaptitude se communique aux corps qui reposent sur leur surface. Ainsi un morçeau de papier, exposé à un ciel serein, se chargera sur une lame métallique de moins d'humidité que s'il était placé sur une lame de verre. Tous les métaux ne résistent pas également à la formation de la rosée : par exemple, on voit quelquefois le platine, le fer, l'acier, le zinc, le plomb, couverts de rosée, tandis que l'or, l'argent, le cuivre et l'étain placés dans les mêmes circonstances, se conservent parfaitement secs. L'état mécanique des corps influe sur la quantité de rosée dont ils se couvrent; en général, la division des substances est propre à l'attirer. 10 grains de laine, placés sous une planche, augmentent, en une nuit, de 9 grains dans leur poids, tandis qu'un égal poids de la même laine placée sur l'herbe et à découvert, se charge de 15 grains de rosée : on pourrait croire, d'après cette expérience, que la rosée tombe comme la pluie : mais le docteur *Wels* a prouvé le contraire par des expériences.

La formation de la rosée est toujours accompagnée de froid; la température de l'herbe et de tous les corps qui se couvrent de rosée, est plus basse que celle de l'air environnant; c'est ce que le docteur *Wels* a reconnu au moyen de thermomètres placés près du

sol et à différentes hauteurs : cette différence se remarque dès le coucher du soleil, et elle a lieu jusqu'après son lever; elle n'a plus lieu dans les nuits sombres. Si pendant une nuit sereine, un nuage passe au zénith, la température de l'herbe monte aussitôt, tandis que celle de l'air n'avait pas changé sensiblement. La température des métaux, descend rarement de 1° à 2° au-dessous de celle de l'air ambiant.

Il résulte des expériences précises et variées du docteur *Wels*, que le refroidissement des corps précède toujours l'apparition de la rosée, qu'on doit regarder comme *conséquence* et non comme cause du refroidissement des corps sur lesquels elle se dépose : s'il n'en était pas ainsi, tous les corps devraient s'en couvrir et se refroidir également : or l'observation prouve le contraire, puisque, comme nous l'avons dit, la température des métaux ne s'abaisse que de 2° au-dessous de celle de l'atmosphère, tandis que l'abaissement du papier, du verre, des matières organiques, va quelquefois jusqu'à 8 degrés.

Mais quelle est la cause de ce refroidissement inégal? C'est, d'après M. *Wels*, *le rayonnement* de la chaleur (1) : plus cette faculté rayonnante des corps est grande, plus le refroidissement est considérable; en sorte que toutes les circonstances qui tendent à augmenter ce rayonnement, augmentent le froid produit et par suite le dépôt de la rosée : ainsi, sous un ciel pur, la chaleur lancée vers les régions supérieures, se perd dans l'espace, et la rosée se forme en abondance : sous un ciel couvert, les nuages compensent par leur rayonnement propre et par leur réflexion, la chaleur perdue par les corps placés à la surface de la terre, et s'opposent par cela même à la formation de la rosée : c'est par cette raison qu'il ne se dépose pas de rosée sous les arbres et près des grands édifices. On conçoit d'après cela, comment les vents qui s'élèvent pendant la formation de la rosée, en arrêtent ou en retardent les progrès, en amenant de nouvelles couches d'air chaud, qui cèdent aux corps terrestres une portion de leur chaleur propre, et les empêchent de se refroi-

(1) Voyez l'ingénieuse Théorie du rayonnement de la chaleur, par M. *Pierre Prévost*, et au moyen de laquelle il a expliqué plusieurs faits observés par M. *Bénédict Prévost*.

dir : de plus ce renouvellement de l'air accélérant l'évaporation, doit être contraire à la formation de la rosée. Nous compléterons cette explication dans le prochain numéro.

J. G. G.

M. *Arago* vient de rendre compte à l'Académie des sciences de Paris, des expériences qu'il a faites, il y a déjà long-temps, sur la lumière qui émane des corps incandescens; il a reconuu que cette lumière, si les corps sont solides ou liquides, est partiellement *polarisée* par réfraction, quand les rayons observés forment avec la *surface de sortie*, un angle d'un petit nombre de degrés. Quant à la lumière des gaz enflammés, elle ne présente, sous aucune inclinaison, des traces de polarisation sensible. M. *Arago* tire de ces observations la conséquence qu'une portion notable de la lumière qui nous fait voir les corps incandescens, se forme dans leur intérieur et jusqu'à des profondeurs qu'il n'a pas encore complètement déterminées : il montre dès à présent, que le même moyen d'observation peut être appliqué à l'étude de la constitution physique du soleil : les résultats qu'il a déjà obtenus dans cette recherche, confirment les conjectures de *Bode*, de *Schroëter* et d'*Herschell sur l'existence d'une atmosphère solaire.*

J. G. G.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Annales de l'Université de Leyden, 1823 – 1824.

C'est une belle idée que celle des concours établis par le réglement entre les six Universités du royaume : à ne la considérer que par rapport aux questions scientifiques, elle aura du moins cet avantage, si le choix en est toujours aussi judicieux, de faire des annales académiques le dépôt des doctrines les plus usuelles de la science, éclairées par de nombreuses applications, et sur-tout précédées de cette partie historique, si négligée par les Géomètres actuels, et qui pourtant nous fait connaître la marche de l'esprit humain dans l'invention des sciences, historique dont les matériaux réunis dans les bibliothèques dont la munificence du gouvernement a doté le haut enseignement, n'ont plus besoin que d'en être extraits et coordonnés avec discernement.

L'Université de Leyden a proposé cette question :

Theoria de maximis et minimis explicetur et variis exemplis illustretur.

Deux mémoires ont été couronnés; l'un de M. *Verdam*, élève de l'Université de Leyden; l'autre de M. *Verhulst*, élève de celle de Gand. Nous allons rendre compte de ces deux pièces, en commençant par celle de M. *Verdam*.

Elle offre deux sections sous les titres : 1.° *Theoria de maximis et minimis functionum definitarum, sive algebraïcarum, sive transcendentium* : 2.° *Theoria de maximis et minimis functionum integralium indefinitorum.*

La première contient trois chapitres ayant pour titres, le premier : *De maximis et minimis functionum unius quantitatis variabilis.*

Le second : *De maximis et minimis functionum duarum variabilium quantitatum.*

Le troisième : *De maximis et minimis quantitatum trium pluriumque variabilium.*

La seconde section est pareillement divisée en trois chapitres.

Le premier : *De maximis et minimis functionis integralis indefinitæ* $\int v\,dx$, *cum* v *est functio quantitatum* $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$ etc.

Le second : *De maximis et minimis functionis integralis indeterminatæ* $\int v\,dx$, *cum in functione* v *non modo continentur variabiles quantitates* $x, y, \frac{dy}{dx}$, etc., *sed etiam aliæ integrales indeterminatæ.*

Le troisième : *De maximis et minimis relativis.*

Le tout est précédé d'une introduction bien faite, mais dans laquelle nous aurions desiré, conformément au vœu déjà émis, que le jeune auteur eût repris dès l'origine, c'est-à-dire, d'*Apollonius* (1), l'histoire *des plus grands* et *des moindres* pour la conduire jusqu'à nos jours.

---

(1) Les Géomètres qui apprécient la méthode sévère des anciens, regretteront la perte de l'ouvrage d'*Apollonius*, intitulé : *les Lieux plans*, dont les modernes ont été réduits à deviner le plan et l'exécution d'après les indices un peu vagues que nous a laissés *Pappus*. Trois mathématiciens modernes ont essayé de rétablir ces lieux plans, savoir *Fermat*, *Schooten* et *R. Simson*. Le travail de *Fermat* fait partie de ses œuvres posthumes imprimées à Toulouse en 1679; l'ouvrage de *Schooten*, intitulé : *Exercitationum mathématicarum libri quinque*, imprimé à Leyden en 1652, contient dans le troisième livre, le morceau intitulé : *Appollonii Pergæi plana restituta.* Quoique la publication de l'ouvrage de *Schooten*, soit antérieure à celle des œuvres posthumes de *Fermat*, le travail de ce dernier est antérieur à celui du premier (Voy. la lettre de *Fermat* à *Roberval*, pap. 153 de ses œuvres). Mais le travail le plus complet est celui du célèbre *R. Simson*, professeur de Mathématiques à l'Université de Glascow, qui a paru dans cette ville en 1749, sous le titre : *Apollonii Pergæi locorum planorum, libri duo. Fermat* s'est encore exercé sur la restitution des Porismes, genre de propositions sur lesquelles *Euclide*, au rapport de *Pappus*, avait écrit trois livres qui ont été perdus. *R. Simson*, plus heureux en ce genre que *Fermat*, a composé un beau traité de *Porismes*, qui fait partie de la collection de ses œuvres posthumes, dont nous devons la publication à la générosité de feu *Milord comte Stanhope.*

La théorie exposée dans le premier chapitre, est connue : mais on y remarquera quelques observations qui conduisent à des abréviations de calcul, toujours profitables; les exemples sont bien choisis et plusieurs offrent de l'intérêt : nous citerons entre autres le suivant : *Detur machina funicularia* ACDB *ex qua pendent duo pondera* P *et* Q, *sintque puncta suspensionis* A *et* B *in eadem linea horizontali sita, ad determinatam distantiam : quæritur ope theoriæ de maximis et minimis, æquilibrii conditiones indagare.* La solution repose sur ce principe : que le centre de gravité du système est le plus bas possible : c'est en effet un axiome de mécanique que le centre de gravité descend autant qu'il peut descendre. M. *Verdam* parvient à une propriété qu'on pourrait tirer immédiatement de l'équilibre du polygone funiculaire, et sur laquelle on a fondé la construction d'une *balance funiculaire.*

Nous soumettrons cependant quelques observations à l'auteur du mémoire. 1.° A la page 38, il applique la méthode connue de *Lagrange*, à la recherche d'une valeur approchée d'une des racines de l'équation

$$6z^3+2z^2-4z-1=0$$

et il trouve $z=+0,78551$; or, si cette racine n'est qu'approchée, ce que nous sommes tentés de croire, il n'est plus permis de diviser la proposée par $z-0,78551$, comme on le ferait dans le cas d'une racine exacte; car on peut ainsi dénaturer les deux autres racines, au point de les faire passer du réel à l'imaginaire, ou *vice versa*; d'ailleurs on peut reconnaître, à priori, l'espèce des racines. 2.° En traitant, pag. 28, la fonction $y=a+b\sqrt{c-x}$, pour en trouver, s'il y a lieu, le *maximum* ou le *minimum*, et faisant les hypothèses $x=c+i$ et $x=c-i$, il obtient ces deux résultats $y'=a+b\sqrt{-1}$ $y''=a+b\sqrt{1}$, en sorte que l'ordonnée qui répond à $c+i$ est imaginaire, tandis que l'autre, à sa gauche, est réelle : cela fait, il continue la courbe au-delà de $x=c+i$ par des ordonnées imaginaires, et il ponctue cette partie, à l'effet de rappeller cette circonstance (1). Nous l'invitons à examiner si la

(1) Dans le prochain numéro, nous montrerons qu'il existe *des courbes ponctuées* et *pointillées :* mais c'est qu'alors les ordonnées sont alternativement réelles et imaginaires.

fonction qu'il traite, n'est pas incomplète, et si la véritable ne serait pas $y=a\pm b\sqrt{c-x}$; de sorte que $y=a$ en serait un axe symétrique par rapport aux branches $+b\sqrt{c-x}$ et $-b\sqrt{c-x}$, réelles pour $x<c$, et qui se raccordent au point $x=o$, qui serait un point singulier. A l'occasion des observations faites à la pag. 44, nous invitons M. *Verdam* à prendre connaissance du mémoire de M. *Dandelin*, inséré dans le prochain volume de ceux de l'Académie des sciences et lettres de Bruxelles.

Dans le second chapitre, on trouve l'analyse de *Lagrange*, relative aux *maxima* et *minima* des fonctions de la forme $z=(x, y)$, et les mêmes caractères déduits de la considération immédiate des surfaces. Viennent ensuite des applications à cinq questions qui toutes offrent de l'intérêt : nous nous bornerons à citer la suivante : *Detur cubus* ABCHG *insistens plano cuidam horizontali* PQ, *in ejus angulum solidum* A; *quod si ex reliquis angulis solidis, præter angulum* D *primo* A *oppositum, demittantur perpendicula* B*b*, C*c*, E*e*, F*f*, G*g*, H*h* *in datum planum, atque conjungantur puncta* *b, c, e, h, f, g, prodibit figura hexagonalis b c h e f g quæ utpote projectio cubi in planum* PQ *haberi potest; rogatur jam cubum ita ponere respectu plani* PQ, *ut figura hexagonalis, seu ut cubi projectio, habeat maximam aeram?* (1)

Dans le troisième et dernier chapitre de la première section, M. *Verdam* reprend la suite de l'analyse de *Lagrange*, étendue aux fonctions de plusieurs variables (2).

Ce chapitre est terminé par la solution d'un problême traité par *Huyghens* et *Lagrange*, et qui a pour énoncé : *Datis duobus globis* A *et* E *perfecte elasticis, invenire massas trium aliorum globorum elasticorum, ita ut si globus primus* A *percutiat secundum* B *data velocitate* *v*; *secundus autem percutiat tertium* C, *ve-*

---

(1) Nous extrairons de nos *Annales Académiques* les solutions les plus intéressantes, pour les consigner dans la *Correspondance*.

(2) Nous l'engageons à prendre connaissance d'un mémoire de M. *J. F. Français*, consigné dans le tom. III des *Annales Mathématiques de Nismes*, ayant pour titre : *Examen d'un cas singulier qui nécessite quelques modifications dans la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.*

locitate ex prima percussione acquisita, et sic porro; ita ut globo postremo, hac perpetua collisione, communicetur velocitas maxima? On trouve que le dernier corps quelque soit le nombre des masses intermédiaires, acquiert le maximum de vitesse, quand les masses sont en progression géométrique.

Telle est, en substance, la première section de cette excellente pièce qui fait honneur à son jeune auteur : les nombreuses citations des œuvres de M. le professeur *de Gelder*, nous font penser que M. *Verdam* en a tiré le plus grand parti, et nous font regretter plus vivement que jamais, de ne pas connaître la langue dont se sert ce savant professeur.

Nous nous étendrons moins sur la seconde section sur laquelle l'auteur s'exprime en ces termes : *Sin autem in parte prima felicius elaboraverim quam in altera, ipsius argumenti naturæ tribuatis : hujus enim partis materiam non ejusmodi esse quæ a juvene, a tyrone, omni perspicuitate et sagacitate exponatur et illustretur, ex animo confiteor.* Cependant cette section est, à peu près, tout ce qu'elle doit être, au moins dans l'intention de l'énoncé. Nous aurions desiré que l'auteur eût motivé en deux mots le partage de son équation (C) en deux autres, ainsi que l'équation (γ).

Nous invitons M. *Verdam*, à ne pas sortir d'une lice où d'autres triomphes lui sont encore réservés. Dans le prochain numéro, nous rendrons compte de sa réponse à la question proposée par l'Université de Gand.

M. *Verhulst*, élève de l'Université de Gand, qui a partagé avec M. *Verdam* la médaille sur la question *de maximis et minimis*, en reprend l'histoire dès l'origine, c'est-à-dire qu'il se reporte à *Apollonius* qui, le premier s'est occupé de ce genre de recherches, et a posé le principe suivi par tous les Géomètres : son introduction offre d'ailleurs tous les documens qu'on peut desirer sur ce point.

Le travail de M. *Verhulst*, est divisé en deux chapitres dont le premier offre la théorie et le second les applications.

Le premier chapitre renferme deux parties, sous les titres :

I. *Expositio principiorum Theoriæ maximorum et minimorum*,

II. *Expositio principiorum methodi variationum.*

Le premier de ces titres renferme deux paragraphes, savoir :

1. *De maximis et minimis valoribus functionum unius variabilis.*

2. *De maximis et minimis valoribus functionum plurium variabilium.*

Nous ferons une observation qui, quoiqu'elle n'ait qu'une importance très-secondaire en apparence, ne doit pas être omise : M. *Verhulst* emploie, sans aucun motif, le signe γ au lieu de l'un des signes F, *f*, φ, ψ, consacrés à la désignation du mot *fonction ;* ce qui peut arrêter le lecteur qui, pour suivre l'exposition d'une théorie qui lui est familière, n'a besoin que de lire les formules. Dans le premier paragraphe, il aurait peut-être mieux débuté, en tirant d'abord les caractères du *maximum* et du *minimum* de la considération des rayons de courbure, et passant de là à la théorie générale, il aurait pu dire un mot des fonctions implicites. Du reste, il y a dans les deux dissertations, une identité obligée, puisque les deux concurrens ont puisé aux mêmes sources.

Le titre II contient aussi deux paragraphes :

1.° *De conditionibus integrabilitatis.*

2.° *De maximis et minimis integralium indeterminatorum.*

Le premier a fourni à M. *Verdam*, la matière des deux premiers chapitres de sa seconde section, et le paragraphe second est le texte de son troisième chapitre.

Ici encore toute la différence ne consiste que dans les développemens plus étendus dans le mémoire de M. *Verdam*, que dans celui de son concurrent. Mais il est une remarque plus importante à faire et qui porte sur un point essentiel. Supposons, pour nous faire entendre, que la fonction intégrale dont on demande le *maximum* ou le *minimum*, renfermant x, y, z et leurs coefficiens différentiels, la variable z dépend de l'équation de condition $L = 0$, L étant une fonction des mêmes variables et de leurs coefficiens : on sait qu'on forme alors la combinaison $\delta\left(\int V dx + \lambda \int L dx\right) = 0$; cela posé, il y a lieu à examiner la différence qui se trouve dans la marche du calcul, suivant qu'on résout par la *méthode des variations* des problêmes purement géométriques ou des questions de mécaniques. Dans le premier cas, les coefficiens par lesquels on multiplie les équations de condition, doivent être regardés comme constans; dans le second, les facteurs indéterminés sont considérés comme variables. On

peut voir sur ce point mon *Traité de calcul intégral, chap. XIX, Calc. des variations*; où on trouvera l'indication des mémoires à consulter.

Il nous reste à parler du chapitre second, divisé en deux paragraphes.

1.° *Maxima et minima functionum unius variabilis.*

2.° *Maxima et minima functionum duarum variabilium.*

Dans le premier paragraphe, on distinguera la question ayant pour titre : *Quæritur distantia brevissima inter duo puncta mobilia, mota uniformiter per duas rectas, positione determinatas, nota tantum positione initiali punctorum.* D'autres questions sont communes aux deux mémoires, et, en général, s'il est vrai de dire avec *Newton : Magis prosunt exempla quam præcepta,* nous devons reconnaître qu'à cet égard, M. *Verdam* prend sur son concurrent un avantage que celui-ci pouvait balancer.

J. G. G.

Notice historique sur les Caustiques.

Tschirnhausen fut le premier qui chercha à déterminer l'espèce de courbes formées par les intersections successives des rayons parallèles du soleil, réfléchis par une surface sphérique concave. En 1682, il présenta à l'Académie des sciences de Paris, une esquisse sur la Caustique du cercle, et la même année, il inséra dans les actes de Leipsick, et, sans démonstrations, les résultats auxquels il était parvenu.

En 1688, l'Académie des sciences nomma trois commissaires, *Cassini, Mariotte* et *De La Hire,* pour examiner les propositions de *Tschirnhausen;* ils ne furent pas d'accord sur leur exactitude.

De La Hire, entreprit de son côté d'éclaircir ce sujet (Traité des Epicycloïdes de *De La Hire,* et mémoires de l'Académie des sciences, Tom. 10).

La construction de *Tschirnhausen,* dont M. *De La Hire* avait montré le défaut, fut aussi reconnue fausse par *Jean Bernoulli,* (Opera omnia, Tom. I); l'inventeur reconnut enfin son erreur (*Act. de Leipsick,* 1690).

On ne s'était encore occupé que des Caustiques par réflexion : plusieurs Géomètres s'emparèrent de ce sujet et le traitèrent d'une manière beaucoup plus générale. On doit surtout citer les *Frères Jean et Jacques Bernoulli*, le *marquis de l'Hôpital* et *M. Carré*. (*Joh. Bernoulli*, Opera omnia, Tom. III; l'ouv. du *marq. de l'Hôpital*, et Mém. de l'Acad. des scienc. pour 1703, pag. 183 et 69).

Ces Géomètres n'ont considéré les caustiques que sous le rapport mathématique, c'est-à-dire, que comme des courbes dont il était intéressant de rechercher les propriétés.

Les modernes ont cherché à appliquer à l'optique les propriétés qu'eux-mêmes, ou leurs prédécesseurs avaient découvertes dans les Caustiques.

Les traités modernes d'optique, les plus estimés, tels que ceux de *La Caille*, de *Biot*, de *Haüy*, ne contiennent rien ou à peu près rien à cet égard. A la vérité *Biot* (Mém. de l'Institut, 1809), s'est servi des Caustiques pour la détermination du champ de la vision, dans le mirage. Le traité d'optique de *Smith*, renferme un aperçu neuf relativement au degré de clarté des diverses portions des caustiques. *Beudant*, dans son Cours des sciences Physiques, *Despretz*, dans son Traité élémentaire de Physique, *Pelletan*, dans sa Physique générale et médicale, font intervenir les Caustiques dans l'optique, mais sans faire usage de considérations Mathématiques. *Petit*, ancien élève de l'Ecole polytechnique, et répétiteur de Physique à la même école, enlevé par une mort prématurée aux sciences qui le regrettent, a donné une construction par points des Caustiques par réflexion et par réfraction, dans le cas des surfaces sphériques réfléchissantes ou refringentes (tom. II, de la Corresp. sur l'Ecole Polyt. pag. 353 et suiv.). On trouve (Journal de l'Ecole Polyt. Tom. VI, 14.e cahier, pag. 1 — 41 et 84—129.) les recherches de M. *Malus* sur les surfaces caustiques, et (Ann. de Math. vol. XI, pag. 229) celles de M. *Gergonne* (Membre correspondant de l'Académie Royale de Bruxelles) sur la manière générale dont s'opère la vision par des rayons refractés, à travers une surface plane disimante, etc.

M. *Auguste De La Rive*, membre de la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève, etc., a écrit en 1823 une dissertation intéressante sur la partie de l'optique qui traite des Courbes, dites Caustiques.

Les travaux de M. *Quetelet*, auront sans doute l'effet d'appeler l'attention des Géomètres de ce pays, sur une branche importante des sciences Physico-Mathématiques.

J. G. G.

Nota. L'article sur la rosée (pag. 19) était déjà sous presse, lorsque nous eûmes connaissance d'une lettre de M. *Flaugergues*, astronome à Viviers, sur ses observations relatives à ce phénomène, adressée au professeur *Pictet* (Bibl. Univ. avril, 1824). Dans cette lettre, M. *Flaugergues* qui a enrichi la Physique de plusieurs faits curieux et de recherches intéressantes, décrit un nouvel instrument destiné à donner la mesure de la quantité de rosée qui se précipite dans une nuit. Cet instrument qu'il nomme *Drosomètre*, consiste en un plateau circulaire de fer-blanc, de neuf pouces et une ligne de diamètre, entouré d'un rebord de deux pouces de hauteur et peint à l'huile : ce plateau se place dans un lieu découvert et horizontalement, à environ quatre pieds du sol. M. *Flaugergues* ayant ainsi recueilli et pesé l'eau de la rosée pendant le courant de l'an 1823, a trouvé qu'elle était de 3 lignes, qu'il était tombé dans la même année 152,5 fois plus de pluie que de rosée; que le nombre des jours de pluie et celui des jours de rosée, ne différaient pas beaucoup entre eux, le premier ne surpassant le second que d'un dix-huitième ; enfin que le mois où il est tombé le moins de rosée, est le mois de mars, et que celui où il en est tombé le plus, est celui d'octobre. Nous ne pouvons qu'inviter nos lecteurs physiciens à répéter ces faciles observations, et à examiner si les circonstances qui accompagnent la production de ce météore, sont celles indiquées par le *docteur Wels*.

J. G. G.

Questions proposées par la Faculté des sciences Physiques et Mathématiques de l'Université de Leyden, pour l'année 1825.

E Physica.

Tuborum opticorum exponatur theoria.

E Mathesi.

Theoria ejus artis quam *Perspectivam* vocant, omni parte ana-

lytice explicetur, et formulæ inventæ cum methodis graphicis comparentur.

Ex Astronomia.

Quomodo elementa orbitæ cometæ ex tribus vel quatuor locis Geometricis deduci possunt?

E Botanica.

Exponatur motus fluidorum in plantis, ejusque causæ.

Questions à résoudre.

1.° Lorsque deux forces égales agissent en sens contraire, sans être directement opposées, auquel cas elles forment ce qu'on nomme *un couple*, on dit qu'un tel systême ne saurait être de lui-même en équilibre; on se contente de déduire cette proposition des formules qui donnent la grandeur et la situation de la résultante de deux forces qui agissent parallèlement et en sens contraire; mais comme il n'est pas exact, en général, d'appliquer des formules à un cas pour lequel elles n'ont pas été construites, on propose de l'établir nettement *à priori*, chose qui n'est pas sans difficulté, et qui nous paraît faire dans la Statique, le pendant de la doctrine des parallèles dans la Géométrie.

2.° Une cissoïde est éclairée par un point lumineux qui se trouve à son pôle, on demande la courbe qui sert de développante à la caustique.

3.° En prenant le rayon d'un cercle pour unité, assigner en fraction continue. la valeur du côté du décagone régulier inscrit.

4.° Dans la parobole, la demi-somme des rayons vecteurs qui aboutissent aux deux extrémités d'un arc quelconque, est toujours égal au rayon vecteur qui aboutit au sommet du diamètre mené par le milieu de la corde, parallèlement à l'axe, plus à la partie de ce diamètre interceptée entre l'arc et la corde.

Le tableau ci-joint, dû à M. *Bonnycastle*, professeur de Mathématiques à l'Ecole Royale de Wolwich, pouvant renfermer quelques omissions, nous invitons les savans de notre pays, à nous transmettre les documens propres soit à le rectifier, soit à le compléter.

Table Chronolouis le commencemen des temps.

Siècles.	Commencemen de chaque sièc	Milieu.	Fin.
Av. J.C. 900			Ebn Ionis.
800		zen.	Arzachel.
700			Campanus, Gérard.
600	Timée.	rt-le-Grand, Peccam, bosco, Vitellion.	Thébit.
500	Anaxagore.		
400	Aristée, Aristille, Eudémus, Timochar crates.	Beig, Cusa, Regiomon-	Copernic, Lucas de Borgo, Léonard de Pise, Schonerus, Walther.
300	Amyclas, Archimè	n, Memmius, Record, , Rothman, Saville, us, Guido - Ubaldi, torius, Zamberti.	Anderson, Tycho-Brahé, Bombelli, Brig, Castelli, Clavius, Digges, Ferrari, Ghetaldus, Maestlin, Rhéticus, Viète.
200		li, Bartholin, Broun- Bonilhaud, Cavalleri, llès, Fermat, Fréniche, Girard, Jacques et Da- régori, Henrion, Van et, Hévélius, Horrébow, r, Mersenne, Niel, oud, Pascal, Riccioli, al, Sluse, Snellius, Ta- Tschirnhaus, Grégoire - Vincent, Viviani, Wallis, Seth Ward, e Witt.	Amontons, Auzout, Bachet, Barrow, Jacques Bernoulli, Collins, Fagnani, Flamstéed, Guido Grandi, Grimaldi, L'Hôpital, Huddes, Hook, Huygens, Kersey, Kinkhuysen, Leibnitz, Lieutaud, Mercator, Molyneux, Mouton, Newton, Pell, Picard, Ricci, Roemer, Rolle, Renaldinus, Schooten, Wren.
100	Vitruve.		
Ap. J.C.	Trasylle.		
100	Nicomaque, Ptolé		
200			
300		mbert, Daniel Bernoul- guer, La Caille, Clai- ollins, Courtivron, Cra- odson, Dollon, Fatio, ne, Goldbach, Guisnée, n, le P. Jacquier, Kœ- P. Leseur, Mairan, Ma- Maupertuis, Mayer, de , Monmort, Nicole, , Robins, Robert Sim- omas Simpson, Walms-	Bailly, Bézout, Borda, Boscovitch, Emerson, Euler, Kaestner, Landen, La Lande, Montucla, Pingré, Mathieu Stewart, Vandermonde, Wargentin, Waring.
400	Marinus, Proclus, C		
500			
600			
700	Alcuin, Bède.		
800	Charlemagne, Gé		

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

ARITHMÉTIQUE.

Sur les questions comprises sous la dénomination commune de règles de trois simples et composées.

D'Alembert se plaint avec raison (Ency. Elém.) de ce que les savans préfèrent la gloire d'augmenter l'édifice, au soin d'en éclairer l'entrée. En conséquence, il forme le vœu que désormais les élémens des sciences, au lieu d'être livrés à des mains inhabiles et inexpérimentées, soient faits, au contraire, par des savans du premier ordre : c'est, sans doute, dans la vue de répondre à cet appel, qu'*Euler* et *Condorcet* ont écrit, le premier des Élémens d'Algèbre, et le second un Traité d'Arithmétique; cependant ce vœu de *D'Alembert* n'a été pleinement rempli qu'à partir de la création de l'École normale où *Lagrange, La Place, Monge,* etc. ont opéré la rénovation complète de ces élémens : cette impulsion donnée, les savans du premier ordre n'ont plus dédaigné de faire des Traités élémentaires, ce qui ne les a pas empêchés de se livrer à des recherches d'un ordre supérieur. Au reste, on ne doit pas oublier que *Newton* avait donné l'exemple.

Toutes les questions comprises sous la dénomination *de règles*

de trois simples et composées, peuvent être comprises dans cet énoncé *général.*

Connaissant toutes les circonstances qui ont concouru à un événement, et connaissant aussi toutes les circonstances qui ont concouru à un autre événement de même nature que le premier, excepté une seule, déterminer cette circonstance inconnue?

Dans cette question : 125 *ouvriers en* 18 *jours, travaillant* 6 *heures par jour, ont fait* 216 *mètres d'un certain ouvrage; il en reste encore* 136 *mètres à faire; on désirerait qu'ils fussent terminés en* 25 *jours; les ouvriers qu'on doit y employer, consentent à travailler* 10 *heures par jour : on demande combien il faudra de ces ouvriers?* les deux événemens sont 216 mètres d'une part, et de l'autre 136 m. : les circonstances qui concourent à la production du premier événement, sont 125 ouv., 18 j., 6 h. par jour : celles qui concourent à la production du second, sont x ouv., 25 j., 10 h. par jour.

Il résulte de l'énoncé général que les élémens d'un tel problême, c'est-à-dire, les données et l'inconnue, sont toujours en nombre pair, et de même espèce ou de même dénomination deux à deux. Il pourrait cependant arriver, dans des cas particuliers, qu'il y eut dans l'énoncé plus de deux élémens de la même espèce; mais leur nombre sera toujours pair, et il sera toujours facile de reconnaître comment ils doivent se correspondre deux à deux.

Il y a donc dans l'énoncé un nombre et un seul nombre donné de l'espèce de celui qu'on cherche, et c'est sur celui-là qu'il faut opérer pour parvenir à l'autre. Or, en opérant sur un nombre d'une espèce déterminée, on ne peut obtenir un nombre de même espèce que lui, qu'en le multipliant par un ou plusieurs nombres abstraits. Donc le nombre cherché doit être égal au nombre donné de même espèce, multiplié par un nombre abstrait, ou par le produit de plusieurs nombres abstraits. Delà résulte cette première règle :

Règle I.re *Le nombre cherché est égal au nombre donné de même espèce que lui, multiplié par une suite de fractions ayant respectivement pour leurs deux termes, les nombres donnés d'une même espèce.*

Toute la difficulté est donc réduite à savoir de quelle manière

on doit écrire ces fractions, c'est-à-dire, à reconnaître quelles sont ceux des nombres donnés qui doivent figurer comme numérateurs, et ceux qu'on doit prendre pour dénominateurs. Or, on peut remplir ce dernier objet par cette autre règle très-simple.

Règle II. *Pour savoir comment doivent être disposés les deux termes de chacune des fractions, examinez successivement si, dans la supposition que chacun des nombres donnés qui entrent dans la seconde partie de l'énoncé* (1), *deviendrait nul, le nombre cherché devrait être nul ou infini : le nombre dont il s'agit, devra être numérateur dans le premier cas, et dénominateur dans le second.*

Appliquons ces règles à la question énoncée plus haut. Si dans le second cas, ou dans le second membre de cet énoncé, au lieu de 136 mètres d'ouvrage, il n'y en avait point, il ne faudrait plus d'ouvriers; ainsi le nombre 136 mètres doit être en numérateur, et son correspondant dans le premier membre, doit être en dénominateur : on a donc le facteur $\frac{136 \text{ m.}}{216 \text{ m.}}$;

Si dans le second membre, au lieu de terminer l'ouvrage en 25 jours, on demandait qu'il fût terminé à l'instant, il faudrait employer un nombre infini d'ouvriers; partant, il faut écrire $\frac{18 \text{ j.}}{25 \text{ j.}}$: ou bien encore, si l'on demandait qu'il fût terminé dans un nombre infini de jours, il ne faudrait pas d'ouvriers, ce qui conduirait à la même fraction, en observant qu'à un dénominateur infini, répond une fraction nulle.

Si enfin, dans le second membre, au lieu de travailler 10 heures par jour, les ouvriers ne devaient travailler qu'un instant indivisible, il en faudrait encore une infinité; donc il faut écrire $\frac{6 \text{ h.}}{10 \text{ h.}}$ pour la fraction correspondante.

On aura donc le résultat

$$\textit{nombre d'ouvriers cherché} = 125 \text{ ouv.} \times \frac{136 \text{ m.}}{216 \text{ m.}} \times \frac{18 \text{ j.}}{25 \text{ j.}} \times \frac{6 \text{ h.}}{10 \text{ h.}}.$$

(1) Chacune des parties de l'énoncé, qu'on peut aussi appeler *membre*, se compose de l'un des événemens et de toutes les causes qui concourent à sa production.

Dans tout problême de mathématique comme dans celui-ci, on peut affirmer que *la quantité cherchée est égale à une quantité connue de même espèce qu'elle, multipliée par un nombre abstrait formé avec des nombres concrets.*

Trois négocians ont fait une société : le premier a mis 600 *fl. pour* 5 *mois; le second* 500 *fl. pour* 9 *mois, et le troisième* 400 *fl. pour* 12 *mois : ils ont gagné* 410 *francs, combien revient-il à chacun?*

On observera que les mises sont énoncées en florins, tandis que le bénéfice l'est en francs.

Par les méthodes connues, on trouve pour le bénéfice du premier

$$\frac{4100 \times 600 \times 5}{600 \times 5 + 500 \times 9 + 400 \times 12}$$

qui revient à l'une de ces trois formes

$$4100^{\text{fr.}} \times \frac{600^{\text{fl.}}}{600^{\text{fl.}} + 500^{\text{fl.}} \times \frac{9^{\text{m.}}}{5^{\text{m.}}} + 400^{\text{fl.}} \times \frac{12^{\text{m.}}}{5^{\text{m.}}}}$$

$$4100^{\text{fr.}} \times \frac{5^{\text{m.}}}{5^{\text{m.}} + 9^{\text{m.}} \times \frac{500^{\text{fl.}}}{600^{\text{fl.}}} + 12^{\text{m.}} \times \frac{400^{\text{fl.}}}{600^{\text{fl.}}}}$$

$$4100^{\text{fr.}} \times \frac{1}{1 + \frac{500^{\text{fl.}}}{600^{\text{fl.}}} \times \frac{9^{\text{m.}}}{5^{\text{m.}}} + \frac{400^{\text{fl.}}}{600^{\text{fl.}}} \times \frac{12^{\text{m.}}}{5^{\text{m.}}}}$$

où l'on voit que, dans tous les cas, le nombre cherché de francs, est égal à un nombre de francs multiplié par un nombre abstrait.

Il est utile, il est même essentiel de faire voir aux élèves que les formules les plus compliquées d'Algèbre, de Géométrie et de Mécanique, sont toutes réductibles à cette forme; et que celles qui ne pourraient s'y ramener, sont radicalement absurdes. Tout ce que nous venons de dire, se rattache à des notions exactes qui trouvent leur place, lorsqu'on expose en Arithmétique les règles de la multiplication et de la division.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

ALGÈBRE.

Question Arithmétique.

Soit un emprunt de 6 000 000 *florins qu'on divise en* 12000 *actions de* 500 *florins chacune, et qu'on veuille payer intérêt et capital en dix ans, sur le pied du denier* 20, *ou au taux de* $\frac{1}{20}$ *pour* 100.

On cherchera d'abord ce qu'on doit payer par an, pour acquitter un prêt de 100 fl, intérêt et capital compris, en dix payemens égaux : c'est ce qu'on trouvera, en faisant $c = 100$ fl., $i = \frac{1}{20}$, $n = 10$ dans la formule générale

$$x = \frac{ci(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

où x désigne le payement annuel, c le capital prêté, i le taux de l'intérêt, n le nombre des années (1). Multipliant le résultat 12 fl. 19 s. par 600 000, quotient de 6 000 000 par 100, on trouve 777 000 florins pour le payement annuel.

Les intérêts de 6 000 000 fl. font, au taux actuel, 300 000 fl., qui étant soustraits de l'annuité 777 000 fl., que le débiteur paye à la fin de la première année, donnent pour reste 477 000 fl. qui fournissent de quoi rembourser 954 actions à 500 fl. chacune. Le débiteur ne devra plus que 11046 actions, c'est-à-dire, 5 523 000 fl. dont les intérêts à la fin de la seconde année, à raison du taux $i = \frac{1}{20}$, font

---

(1) Si dans la formule connue

$$x = \frac{c(1+i)^n}{1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{n-1}}$$

on somme le dénominateur, on tombera sur celle du texte.

276 150 fl. qui retranchés de l'annuité 777 000 fl. payables à la fin de la seconde année, laissent 500 850 fl. qui fournissent presque de quoi à rembourser 1002 actions, et ainsi de suite.

Ans.	Actions existantes pend.t chaq.e année.	Intérêts dûs à la fin de chaque année.	Actions qu'on rembourse tous les ans.	Prix de ces actions.	Total de chaque année.
1	12000	300000	954	477000	777000
2	11046	276150	1002	501000	777150
3	10044	251100	1052	526000	777100
4	8992	224800	1104	552000	776800
5	7882	197200	1160	580000	777200
6	6728	168200	1218	609000	777200
7	5510	137750	1279	639500	777250
8	4231	105775	1342	671000	776775
9	2889	72225	1410	705000	777225
10	1479	36975	1479	739500	776475

On observera que la sixième colonne renferme les sommes des 3.me et 5.me.

1.° Chaque prêteur peut choisir la classe qui lui ferait rembourser son capital à l'époque où il compte en avoir besoin pour d'autres emplois. 2.° On peut ne pas fixer d'avance les actions de chaque classe; mais dès que l'emprunt sera rempli, on mettra les numéros des actions dans une roue, et les 954 premiers n.os sortans, seront remboursés à la fin de la première année; les 1002 suivans à la fin de la seconde; les 1052 suivans à la fin de la 3.me, et ainsi de suite. 3.° On pourra convenir de ne tirer qu'un seul numéro de la roue; celui-là et les 953 suivans, seront remboursés à la fin de la première année: les 1002 numéros suivans, le seront à la fin de la seconde, et ainsi de suite, et lorsqu'on sera parvenu au dernier, on continuera par les premiers 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à celui inclusivement qui précède le numéro tiré de la roue.

Comme cette solution repose sur la valeur du payement annuel

et égal, ou sur *l'annuité* à payer pendant un certain nombre d'années, pour acquitter 100 fl, capital et intérêt compris, on pourrait calculer une table des valeurs de x, pour $c = 100$, $n = 1, = 2.....$ $= 100$ $i = \frac{1}{8}, = \frac{1}{10} = \frac{1}{12} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{40}$.

J. G. G.

GÉOMÉTRIE.

Sur les Corps ou Polyèdres réguliers.

On a défini *Polyèdres réguliers* ceux dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux, conditions qui ne peuvent avoir lieu que dans un petit nombre de cas.

1.° Si les faces sont des triangles équilatéraux, on peut former chaque angle solide du polyèdre, avec trois, quatre ou cinq angles de ces triangles : d'où résultent trois corps réguliers qui sont : le *tetraèdre*, l'*octaèdre* et l'*icosaèdre :* on ne peut assembler autour d'un point six angles de ces triangles, puisque leur somme valant quatre droits, ne peut faire un angle polyèdre.

2.° Si les faces sont des carrés, on peut assembler les angles trois à trois; d'où résulte l'*hexaèdre* ou *cube :* quatre des ces angles valant quatre angles droits, ne peuvent faire un angle polyèdre.

3.° Enfin si les faces sont des pentagones réguliers, on peut encore assembler les angles trois à trois, et il en résulte le *dodécaèdre* régulier : comme chaque angle d'un pentagone régulier, vaut $\frac{6}{5}$ d'un angle droit, quatre de ces angles vaudront plus de quatre droits : ainsi on ne pourra assembler plus de trois pentagones.

Comme trois angles d'hexagones réguliers valent quatre droits, et que trois angles d'heptagones valent encore plus, et, *à fortiori*, en passant à des polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés, on conclura qu'il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers dont trois sont formés avec des triangles équilatéraux, un avec des carrés, et un avec des pentagones réguliers.

De ces cinq corps réguliers, on connaît déjà le tetraèdre, et l'hexaèdre : on sait encore que l'octaèdre est composé de deux pyramides régulières et quadrangulaires, adossées par une base commune qui est un carré : si trois droites égales AC, BD, SS′ (*fig.* 1) sont perpendiculaires entre elles et se coupent dans leurs milieux, les extrémités de ces droites seront les sommets d'un octaèdre régulier. Nous passerons au dodécaèdre : la figure FGHIKLMNOP (fig. 2), est un décagone régulier situé dans le plan de la planche, ABCDE est un pentagone dont le plan est parallèle à celui de la planche et au-dessus de ce plan : la situation de ce pentagone, ses côtés et ses angles sont tels qu'en liant les points G et C, I et D, L et E, N et A, P et B, les pentagones BPFGC, CGHID, DIKLE etc. sont réguliers et égaux au pentagone ABCDE : le corps ABCDENOPFGHIKLM est le demi-dodécaèdre régulier dont l'autre moitié *abcdenopfghiklm* est construit au-dessous du plan du décagone NOP..... LN avec lequel coïncide l'autre décagone *nop..... ln*; de manière que les sommets A et *a*, B et *b*, etc., soient symétriquement placés au-dessus et au-dessous de la face commune du décagone : les faces supérieure et inférieure ABCDE et *abcde* sont parallèles. Décrivons l'icosaèdre (*fig.* 3), et à cet effet, soit ABC un triangle équilatéral situé dans le plan de la planche; autour de chacun des angles A, B, C, on assemblera quatre autres angles respectivement égaux à l'angle BAC, appartenant à des triangles équilatéraux et égaux chacun au triangle ABC : on aura donc une surface convexe composée de dix triangles équilatéraux, dont les sommets D, E, F, G, H, I situés sur le contour, réuniront alternativement trois et deux angles de triangles équilatéraux : cette surface sera la moitié de celle de l'icosaèdre : imaginant donc une seconde surface *abcdefghi* construite exactement de la même manière, et ces deux surfaces étant appliquées l'une à l'autre par les contours *idefghi*, IDEFGHI, on aura l'icosaèdre dont les faces opposées *abc*, ABC sont parallèles.

Nous avons cru convenable de rappeler cette construction connue des cinq polyèdres réguliers, avant de passer à la solution analytique de la question.

La doctrine des polyèdres réguliers, peut être présentée d'une manière simple et lumineuse, en partant des considérations suivantes. Si ces polyèdres existent, ils peuvent être décomposés en pyramides régulières ayant les faces de ces polyèdres pour bases et le sommet commun au centre de la sphère circonscrite. Et comme la somme des angles polyèdres partiels autour du sommet commun ou du centre de la sphère, doit remplir l'espace autour de ce centre, on conclura de cette considération, le nombre des pyramides régulières qui constituent le polyèdre régulier, ainsi que le nombre et l'espèce des faces qui forment l'enveloppe ou la surface du polyèdre. La condition qui caractérise essentiellement ces polyèdres, consiste en ce que les inclinaisons des faces, dans les pyramides constituantes, sont égales entre elles. Cependant rien n'empêche d'étendre la même méthode à la composition d'autres polyèdres, sous des conditions données, suivant lesquelles les inclinaisons des faces consécutives des pyramides constituantes, ne seraient plus égales. Notre but n'est pas ici d'approfondir cette question, mais d'indiquer la marche à suivre pour obtenir une solution complète.

A, B, C étant les trois angles d'un triangle sphérique à arcs de grands cercles, qui recouvre le trièdre ayant son sommet au centre de la sphère dont le rayon $= 1$, on sait que

$$\text{surf. ABC} = A + B + C - 2$$

en prenant pour unité superficielle le huitième de la sphère, qu'on nomme *octant*, ou bien encore *triangle tri-rectangle*, et pour unité des angles linéaires, l'angle droit. Nous supposerons, en premier lieu, $A = B = C$, ce qui revient à dire que les inclinaisons des faces, sont égales. Si l'on observe d'ailleurs que surf. ABC mesure l'angle trièdre, lorsqu'on prend pour unité *l'angle spaciaire* qui s'appuie sur le triangle tri-rectangle, angle que nous désignerons par $P^{(3)}$, pour rappeler l'angle entre trois faces, on aura

$$P^{(3)} = 3A - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Passons à la pyramide régulière et quadrangulaire, recouverte par un quadrilatère sphérique ABCD (1) à arcs de grands cercles : si on imagine par les sommets B et D, des arcs diagonaux de grand cercle, on décomposera ce quadrilatère en deux triangles sphériques qui répondent à deux angles trièdres $p^{(3)}$ et $p'^{(3)}$; on aura donc

$$p^{(3)} = A + B' + D' - 2,\ p'^{(3)} = B'' + D'' + C - 2$$

et, par l'addition,

$$P^{(4)} = A + B + D + C - 2 \times 2 = 4A - 2 \times 2 \ldots (2).$$

Et, en général, l'angle polyèdre étant formé de k faces, on aura

$$P^{(k)} = kA - (k-2)\,2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Si l'on observe que la somme des angles polyèdres $P^{(k)}$ réunis autour du même point, ou du centre de la sphère, doit former huit angles droits spaciaires, on aura cette seconde condition

$$N \times P^{(k)} = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

N désignant le nombre des pyramides régulières élémentaires. On a donc deux équations et trois inconnues savoir : A, N et $P^{(k)}$; on pourra conséquemment disposer de l'une d'elles, et, par exemple, de l'inclinaison A qu'on pourra rapporter soit à l'angle droit dièdre, soit à quatre de ces angles, et, à cet effet, on posera $A = \frac{m}{n} = \frac{4}{n}$, en prenant d'ailleurs $n > 2$.

Considérons d'abord le tétraèdre régulier pour lequel $k = 3$: les formules (A) et (B) deviennent pour ce cas,

$$P^{(3)} = 3A - 2,\ N \times P^{(3)} = 8,\ \text{d'où}\ N = \frac{8}{3A-2} = \frac{8n}{12-2n}:$$

on a d'ailleurs les limites

$$3A > 2,\ 3A < 6,\ \text{c'est-à-dire},\ A > \tfrac{2}{6}\ \text{et}\ < 2$$

(1) Le lecteur pourra facilement restituer la figure.

dont la première exprime que $P^{(3)}$ ne peut être négatif, ou que les trois angles du triangle sphérique qui ferme $P^{(3)}$, doivent surpasser deux droits, et la seconde énonce qu'ils doivent être moindres que six droits : de là les limites $n>2$ et $n<6$ dont la seconde rend le nombre N positif : d'ailleurs N devant être un nombre entier, $12-2n$ doit être diviseur de $8n$; d'où il suit qu'on ne peut faire que les hypothèses $n=3, n=4, n=5$. A la première répondent $A=\frac{4}{n}=\frac{4}{3}$, $N=4$, $P^{(3)}=2$, d'où résulte le *tétraèdre régulier*. La seconde donne $A=\frac{4}{n}=\frac{4}{4}=1$, $N=8$, $P^{(3)}=1$, à laquelle répond l'*octaèdre régulier*. La troisième donne $A=\frac{4}{5}$, $N=\frac{40}{12-10}=20$, $P^{(3)}=\frac{2}{5}$, $N\times P^{(3)}=8$, c'est-à-dire, l'*icosaèdre régulier*.

Pour $n>5$, le nombre N deviendrait infini, puis négatif.

Passons à la valeur $k=4$ à laquelle répondent

$$P^{(4)}=4A-4=4(A-1), N\times P^{(4)}=8, \text{ d'où } N=\frac{8}{4(A-1)}$$

et les deux limites

$$4A>4,\ 4A-4<4, \text{ d'où } A>1 \text{ et } A<2$$

dont la seconde exprime que $P^{(4)}$ doit être moindre que quatre angles spaciaires droits. En faisant toujours $A=\frac{4}{n}$, on a

$$N=\frac{2n}{4-n}$$

et comme d'ailleurs aux limites ci-dessus de A, répondent $n<4$ et $n>2$, il suffira d'essayer $n=3$ qui donne

$$A=\tfrac{4}{3},\ N=6,\ P^{(4)}=\tfrac{4}{3} \text{ et } N\times P^{(4)}=8.$$

Ces déterminations annoncent l'*hexaèdre régulier*, ou le *cube*.

Faisons enfin $k=5$: nous aurons

$$P^{(5)}=5A-6,\ N\times P^{(5)}=8, \text{ d'où } N=\frac{8}{5A-6}=\frac{8n}{20-6n}$$

et les limites

$$5A > 6,\ 5A - 6 < 4,\ \text{d'où } A > \tfrac{6}{5} \text{ et } A < 2$$

et, à cause de $A = \dfrac{4}{n}$,

$$n < \tfrac{20}{6};\ n > 2,\ \text{c'est-à-dire, } n < 4 \text{ et } n > 2.$$

Faisant $n = 3$, on trouve

$$A = \tfrac{4}{3},\ N = 12,\ P^{(5)} = \tfrac{2}{3},\ N \times P^{(5)} = 8$$

d'où résulte le *dodécaèdre régulier*.

Il nous reste à examiner s'il existe d'autres polyèdres réguliers. Des équations (A) et (B), on tire

$$N = \frac{8}{kA - (k-2)2} = \frac{8n}{4k - (k-2)2n} = \frac{4n}{2k - (k-2)n}$$

après avoir écrit pour A sa valeur $\dfrac{4}{n}$. Mais on doit avoir $n > 2$ et $k > 5$; ce qui permettra de supposer $k = 3 + n$: d'une autre part, on doit satisfaire à la condition de N positif, où à l'inégalité

$$2k > (k-2)\,n,$$

qui se traduit dans celle-ci

$$6 + 2n > (n + 1)n;\ \text{d'où } 6 + n > n^2.$$

D'abord, pour $n = 3$, qui répond à $k = 6$, on a $6 + n = n^2$, d'où résulte $N = \infty$; et, pour $n > 3$, hypothèse à laquelle répond $k > 6$, et $6 + n < 3n + n < 3n < n^2$, on a $N < 0$, ce qui annonce l'impossibilité de former d'autres polyèdres réguliers.

En remontant à l'expression (A), on verra sans peine que $k - 2$ compte le nombre des triangles sphériques dans lesquels on peut décomposer le polygone sphérique qui recouvre l'angle polyèdre $P^{(k)}$: ainsi, en augmentant $k - 2$ de deux unités, on aura le nombre des côtés de chacun des polygones réguliers dont la réunion forme l'enveloppe polyédrique, et on trouvera que celles du *tétraèdre*, de l'*octaèdre* et de l'*icosaèdre*, se forment de triangles équilatéraux, celles de l'*hexaèdre* de cubes, et celles du *dodécaèdre* de pentagones réguliers. On peut même compter les angles polyédriques :

car, par exemple, le *dodécaèdre* a douze faces pentagonales et conséquemment $5 \times 12 = 60$ angles plans ; mais chacun des angles polyèdres exigeant la réunion de trois de ces angles, on aura $\frac{60}{3} = 20$ angles polyédriques.

Les cinq corps réguliers que nous venons de considérer, se nomment encore *corps Platoniques*, parce que *Platon* en faisait les principes du *feu*, de l'*air*, de l'*eau* et de la *terre* ; selon ce philosophe, les parties constituantes du feu, sont des *tétraèdres ;* celles de de l'air, des *octaèdres ;* celles de l'eau, des *icosaèdres ;* celles de la terre, des *hexaèdres*. Quant au *dodécaèdre*, il sert à la formation d'un cinquième élément qui est l'*éther*, ou il n'est peut-être qu'une simple représentation de l'univers : cette fonction que *Platon* assigne au dodécaèdre et la raison qu'il en donne, montrent dans quelle classe d'opinions on doit ranger celle de ce philosophe sur les élémens des corps, et nous dispensent d'en faire un examen sérieux.

Considérons, en second lieu, une pyramide droite, à base rhomboïde ; que l'inclinaison des deux faces adjacentes à chacun des angles obtus de la base, vaille le tiers de quatre droits, et que l'inclinaison des deux faces adjacentes à chacun des angles aigus de la même base, soit le quart de quatre droits : on demande l'angle au sommet de la pyramide : en désignant par P l'angle polyèdre cherché, par 1^{P} l'unité d'angle spaciaire, par 1^{S} l'aire du triangle tri-rectangle, on aura la proportion

$$P : 1^{P} = 2 \times \tfrac{4}{3} + 2 \times \tfrac{4}{4} - 4 : 1^{S} ; \; d\text{'où } P = \tfrac{2}{3} :$$

ainsi, douze de ces angles convenablement placés, formeront *le dodécaèdre rhomboïdal*. On peut supposer l'inclinaison des deux faces latérales adjacentes à chaque angle obtus de la même base, $= \frac{4}{3}$ et les deux autres inclinaisons chacune à $\frac{4}{5}$: on trouvera alors $P = \frac{4}{15}$, ce qui fait le trentième de 8 droits : de sorte que trente de ces angles convenablement disposés autour du même point, formeront un *tria-contaèdre rhomboïdal*.

Il y a lieu à faire quelques recherches sur ce sujet que nous n'avons voulu qu'indiquer ici. On en trouvera de très-étendues et d'intéressantes sur le même fonds, dans le Mémoire couronné de M. *H. J. Kumps*, en réponse à la question proposée par la Fa-

culté des sciences de l'Université de *Louvain*, qui a pour énoncé : *Datus sit radius sphæræ cui singula corpora solida quorum hedræ sunt polygona duplicis generis (triangula et quadrata, triangula et pentagona, quadrata et pentagona, quadrata et hexagona......) regularia, anguli solidi æquales vel symmetrici, inscripta sunt. Quærantur valores generales qui præbent quantitatem; 1.° cujusvis ejus modi corporis acierum; 2.° hedrarum; 3.° superficierum; 4.° soliditatis; 5.° radii denique circuli qui circa singulam cujusvis corporis supra inventi hedram circumscribi potest.* Cette pièce est consignée dans les annales de Louvain, année 1820 — 1821. On peut encore consulter le chap. II et la Trigonométrie plane, Tom. second de l'ouvrage de *Louis Bertrand de Génève*, ayant pour titre : *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue*; cet ouvrage est une mine féconde que doivent exploiter ceux qui veulent écrire des élémens de mathématiques.

J. G. G.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES. (1)

Sur la détermination des foyers d'une section conique.

Le foyer (α, β) *d'une section conique, est un point tellement situé que sa distance à un point quelconque* (x, y) *de la courbe, est une fonction rationnelle et entière des coordonnées de ce point.*

Telle est la définition *du foyer*, donnée dans quelques traités de Géométrie analytique, et d'après laquelle nous allons l'assigner, en partant de l'équation la plus générale du second degré. Mais auparavant, nous rapporterons une autre définition de ces mêmes points, donnée par M. *Gergonne*, qui nous paraît préférable à la précédente, mais qui, malheureusement, a l'inconvénient de conduire à une élimination laborieuse. Ce savant Géomètre propose de *trouver deux points du plan d'une courbe, auxquels tous les points de cette courbe, étant rapportés, son équation devienne la plus simple possible* (2), M. *Gergonne* indique cette marche : si $f(x, y)=0$ est l'équation de la courbe, il faudra, pour résoudre le problême, éliminer x et y entre cette équation et les deux

(1) Pour ne pas multiplier les divisions, nous avons rangé toute la science sous les titres : *Mathématiques élémentaires* et *Mathématiques transcendantes*, le premier comprenant l'arithmétique proprement dite, l'algèbre jusqu'au second degré inclusivement, et la géométrie des lignes, des surfaces et des volumes. Nous renvoyons le surplus au second titre.

(2) Peut-être conviendrait-il de ne pas supposer que les deux points sont déjà dans le plan de la courbe, en laissant à l'analyse le soin de prouver que ces deux points sont effectivement dans ce plan.

J. G. G.

suivantes

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,\ (x-\alpha')+(y-\beta')^2=r'^2$$

α et β, α' et β' étant les coordonnées rectangulaires des points cherchés, r et r' leurs distances à tout point de la courbe, et profiter de l'indétermination des quatre constantes α, β, α' et β' pour rendre l'équation résultante en r et r', la plus simple possible. A la vérité, l'élimination ne pourrait être que laborieuse, même pour le second degré. Ces considérations peuvent s'étendre aux surfaces courbes, et l'on voit que si

$$f(x, y, z)=0,$$

est l'équation d'une pareille surface, la manière la plus analytique d'en trouver les points remarquables, sera d'éliminer x, y, z entre cette équation et les trois suivantes

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2=r'^2$$
$$(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2=r''^2$$

et de disposer ensuite des neuf indéterminées, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'' et γ'', de manière à rendre l'équation résultante en r, r', r'' la plus simple possible. Mais ici les difficultés de calcul sont bien plus grandes que dans le premier cas.

Revenons au premier énoncé et prenons l'équation la plus générale du second degré

$$ax^2+by^2+2cxy+2a'x+2b'y+d=0\dots\ (1)$$

rapportée, pour plus de simplicité, à un système d'axes rectangulaires : on aura pour la distance du point (α, β) au point (x, y)

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

Si l'on veut que (α, β) soit un foyer, ou que, suivant la définition, la distance entre (α, β) et (x, y) soit rationnelle en coordonnées du dernier point, il faudra qu'on ait

$$\sqrt{(\alpha-x)^2+(y-\beta)^2}=gx+hy+k,$$

d'où

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(gx+hy+k)^2=0\dots\ (2);$$

et tout se réduira à exprimer que les équations (1) et (2) sont

identiques, ou du moins qu'elles ne diffèrent que par un facteur constant λ. Ainsi on déterminera α et β de manière à rendre identique, quels que soient x et y, l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(gx+hy+k)^2$$
$$=\lambda\,(ax^2+by^2+2cxy+2a'x+2b'y+d)$$

on obtient ainsi entre les six inconnues α, β, g, h, k, λ les six équations suivantes, en nombre suffisant pour les déterminer, savoir :

$$\left.\begin{array}{ll} 1-g^2=\lambda a & -\alpha-kg=\lambda a' \\ 1-h^2=\lambda b & -\beta-kh=\lambda b' \\ -gh=\lambda c & \alpha^2+\beta^2-k^2=\lambda d \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Il résulte de là que les sections coniques ont, généralement parlant, quatre foyers; car par l'élimination de g, h, k, λ entre ces six équations, on est conduit à deux équations du second degré entre α, β et les coefficiens a, b, c etc. de la proposée.

Pour faire l'application de cette analyse à l'ellipse, nous prendrons l'équation la plus simple de cette courbe, qui est la suivante

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0$$

en sorte que les coordonnées α et β auront leur origine au centre, et que les équations (3) deviendront

$$\begin{array}{ll} 1-g^2=\dfrac{\lambda}{A^2} & \alpha+kg=0 \\ 1-h^2=\dfrac{\lambda}{B^2} & \beta+kh=0 \\ gh=0 & \alpha^2+\beta^2-k^2=-\lambda \end{array}$$

d'où on tirera ces systèmes de valeurs

$$\begin{array}{l|l} g=0 & h=0 \\ h=\dfrac{1}{B}\sqrt{B^2-A^2} & g=\dfrac{1}{A}\sqrt{A^2-B^2} \\ k=B & k=A \\ \alpha=0 & \beta=0 \\ \beta=\pm\sqrt{B^2-A^2} & \alpha=\pm\sqrt{A^2-B^2} \\ \lambda=A^2 & \lambda=B^2 \end{array}$$

or, comme on a $A >$ ou $< B$, il s'ensuit qu'à l'exception du cas du cercle qui répond à $A = B$, d'où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, toujours l'un des systèmes α, β sera réel et l'autre imaginaire. Ainsi, indépendamment de deux foyers réels situés sur son grand axe, l'ellipse aura deux foyers imaginaires situés sur le petit.

Pour passer à l'hyperbole, on changera B en $B\sqrt{-1}$, ce qui donnera ces déterminations

$g = 0$	$h = 0$
$h = \frac{1}{B}\sqrt{A^2 + B^2}$	$g = \frac{1}{A}\sqrt{A^2 + B^2}$
$k = B\sqrt{-1}$	$k = A$
$\alpha = 0$	$\beta = 0$
$\beta = \pm\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{-1}$	$\alpha = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$
$\lambda = A^2$	$\lambda = -B^2$

de sorte qu'ici ce sera toujours le second système qui sera réel.

Pour la parabole, on prendra l'équation

$$y^2 - 2Px = 0$$

ce qui donnera

$$a = 0,\ b = 1,\ c = 0,\ a' = -P,\ b' = 0,\ d = 0$$

en conséquence, les six équations (3) deviendront

$$\begin{array}{ll} 1 - g^2 = 0 & \alpha + kg = \lambda P \\ 1 - h^2 = \lambda & \beta + kh = 0 \\ gh = 0 & \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0 \end{array}$$

d'où on tirera

$$\begin{array}{ll} g = \pm 1 & k = \frac{1}{2}P \\ h = 0 & \alpha = \frac{1}{2}P \\ \lambda = 1 & \beta = 0 \end{array}$$

L'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = gx + hy + k$$

offre un moyen bien simple de construire les sections coniques par l'intersection d'une droite mobile constamment parallèle à une droite

fixe, avec un cercle variable de rayon, dont le centre fixe (α, $\mathfrak{C}$) n'est autre chose que le foyer de la courbe : c'est un problême dont nous proposerons la solution (1).

(*Art. extrait.*) J. G. G.

Probléme d'Arithmétique.

On demande 1.° *quel est au bout du temps* t, *l'intérêt* y *pour* un, *auquel on a placé son capital, lorsqu'on reçoit de ce capital une rente* a *pour* un, *que l'on replace à mesure, à* i *pour* un : 2.° *quelle doit être la valeur de* t, *pour que* y *atteigne son maximum?*

1.° Sur la première partie de la question, nous reprendrons les choses dès les premières notions.

Si l'on ne veut pas rembourser un capital tout à la fois avec les intérêts, on peut en rembourser d'abord une partie a, puis une partie b, puis successivement des parties d, e, f..... u, jusqu'à l'entière extinction de la dette.

Soit donc un capital c à rembourser avec les intérêts annuels au taux i pour *un*, et soit posé $1+i=q$. On devra pour la première année, ci pour les intérêts, et si l'on rembourse a, on aura donné un à-compte $a-ci$: ainsi il sera encore dû....... $c-(a-ci)=c(1+i)-a=cq-a$: ou, en d'autres termes, on devra à la fin de la première année, tant pour le capital que pour les intérêts, $c+ci=cq$, et comme on rembourse a, il restera dû $cq-a$, comme nous venons de le trouver. A la fin de

---

(1) Il y aurait lieu à rechercher la raison soit métaphysique, soit physique de ces foyers imaginaires.

J. G. G.

la seconde année, on devra $(cq-a)q$, et comme on paye b, il restera dû cq^2-aq-b. A la fin de la troisième année, on devra $(cq^2-aq-b)q$; on paye d; il restera dû cq^3-aq^2-bq-d. Et, en général, après un nombre d'années, marqué par t, on devra

$$cq^t-(aq^{t-1}+bq^{t-2}+dq^{t-3}+\ldots\ldots+u)\ldots\ (1).$$

Nous supposons ici que l'intérêt soit composé, c'est-à-dire, qu'au bout de chaque année, l'intérêt s'ajoute au capital et fructifie avec lui. Les quantités $a,\ b,\ d\ldots\ldots\ u$, peuvent être telles et en tel nombre que la dette soit réduite à zéro : on peut encore les supposer égales et annuelles, et alors on les nomme *annuités* : sous toutes ces hypothèses, l'expression (1) donnera

$$cq^t-a(q^{t-1}+q^{t-2}+q^{t-3}+\ \ldots\ldots+q^0)=0,$$

d'où l'on tire

$$cq^t=a(q^{t-1}+q^{t-2}+\ldots\ldots+q^0)=\frac{a(q^t-1)}{q-1}=\frac{a(q^t-1)}{i}$$

en observant que le facteur, entre parenthèses, est une progression par quotiens égaux, dont le nombre des termes est égal à t. Le premier membre cq^t, est ce que devient le capital c placé au taux i pour *un*, après t années, et le second est le montant de toutes les *annuités* perçues au moment où l'on cesse de les recevoir. Or, d'après la question actuelle, ce montant doit équivaloir à un simple placement pendant la durée de l'annuité, au taux y cherché : c'est ce qu'on trouve en changeant i en y dans q, et posant d'ailleurs, pour simplifier, $c=1$. On a donc l'équation

$$\frac{a(q^t-1)}{i}=(1+y)^t \text{ d'où } a(q^t-1)-i(1+y)^t=0\ldots\ (2)$$

2.° La quantité variable t peut être regardée comme l'abscisse d'une courbe dont y représenterait l'ordonnée. On demande à quelle valeur de t répond le maximum de y? A cet effet, on différentiera l'équation (2), en regardant t comme la variable principale, ce qui donne

$$aq^tlq-i(1+y)^tl(1+y)-it(1+y)^{t-1}\frac{dy}{dt}=0$$

où l désigne un *logarithme népérien*. Faisant $\frac{dy}{dt}=0$, il vient

$$\frac{aq^t lq}{i}=(1+y)^t l(1+y)$$

équation qui, divisée par (2), donne celle-ci

$$\frac{q^t lq}{q^t-1}=l(1+y)=\frac{1}{t}l\left[\frac{a}{i}(q^t-1)\right]\ \dots\ (3).$$

Il s'agit de tirer de la dernière la valeur de t qui répond au *maximum* de y, ce qui ne peut se faire qu'à l'aide des séries, puisque l'équation (3) est transcendante. A cet effet, nous poserons

$$\frac{1}{q^t}=x,\ \text{d'où}\ t=-\frac{lx}{lq}\ \dots\dots\dots\dots\ (4)$$

et l'équation (3) deviendra, après quelques réductions,

$$(1-x)\,l\left(\frac{a}{i}\right)+(1-x)\,l(1-x)+x\,lx=0\ \dots\ (5)$$

or,

$$(1-x)\,l(1-x)=-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$x\,lx=x\,l\,[1-(1-x)]=x\left[-(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}\right.$$
$$\left.-\frac{(1-x)^4}{4}-\dots-\frac{(1-x)^n}{n}\dots\right]$$

développant chaque terme, et sommant au moyen du calcul aux différences finies ou des formules connues, les coefficiens des puissances de x, on trouvera

$$xlx=x\left[-\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}\right)+nx-\frac{n(n-1)}{2.2}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.3}x^3-\frac{n\dots(n-3)}{2.3.4.4}x^4\ \dots\dots\ \mp\frac{x^n}{n}\right]$$

nommant h la somme de la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$, l'équation (5) deviendra

$$(1-x)\,l\left(\frac{a}{i}\right)-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\dots\dots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$
$$+x\left[-h+nx+\dots\dots\mp\frac{x^n}{n}\right]=0$$

c'est-à-dire,

$$l\left(\frac{a}{i}\right)=\left[1+h+l\left(\frac{a}{i}\right)\right]x-(n+\tfrac{1}{2})x^2+\left[\frac{n(n-1)}{2.2}-\frac{1}{2.3}\right]x^3$$
$$-\left[\frac{n.....(n-2)}{2.3.3}+\frac{1}{3.4}\right]x^4+\left[\frac{n...(n-3)}{2.3...4.4}-\frac{1}{4.5}\right]x^5-\text{etc.}$$

résultat que nous représenterons abréviativement par

$$N=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}$$

Or, en recourant à la formule de *Newton* pour le retour des suites, ou au théorème de *Lagrange*, (Equat. Num. Not. XI), on trouve

$$x=\frac{1}{A}N-\frac{B}{A^3}N^2+\frac{2B^2-AC}{A^5}N^3+\frac{5ABC-A^2D-5B^3}{A^7}N^4\text{etc.}$$

Posons, par exemple, $a=0,1$, $i=0,05$, $n=7$; on aura

$$N=l\left(\frac{a}{i}\right)=l2=0,6931418,\ 1+h=3,592858\ \text{etc.}$$

On peut ainsi pousser aussi loin qu'on voudra l'évaluation de x, ou plutôt celle de lx; en sorte que, d'après (4), on aura

$$t=\frac{-l\,[0,1617234+0,0457672+0,0157061+0,0057724\,.....}{l\,(1,05)},$$

$$=\frac{-l\,(0,228969)}{l\,(1,05)}=\frac{0,6402232}{0,0211893}=30,21\ \text{ans}.$$

qui représente, à peu près, *la durée moyenne de la vie.*

De l'équation (3), savoir :

$$\frac{tq^t lq}{q^t-1}=l\left[\frac{a}{i}(q^t-1)\right]$$

on tire facilement

$$a=\frac{iq^{\frac{tq^t}{q^t-1}}}{q^t-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

qui, pour $t=\infty$, donne $a=i$: on se rappelle que a désigne l'*annuité.* On peut dans cette équation, faire différentes suppositions pour t, d'où résulteront pour a différentes valeurs : si l'on voulait

la valeur de t pour une certaine valeur déterminée de a, on pourrait l'obtenir par l'interpolation.

L'équation (2) résolue par rapport à y, donne

$$y = -1 + \sqrt[t]{\left[\frac{a(q^t - 1)}{i}\right]}$$

qu'on pourra construire sur l'abscisse t, en faisant successivement $t = 0, = 1, = 2 \ldots = \frac{l(a+i) - la}{l(1+i)} = \frac{la - l(a-i)}{l(1+i)} \ldots\ldots = \infty$.

En désignant la sous-tangente par s et la sous-normale par s', on trouve

$$s = \frac{ity(1+y)^{t-1}}{aq^t lq - i(1+y)^t l(1+y)}$$

$$s' = \frac{y[aq^t lq - i(1+y)^t l(1+y)]}{it(1+y)^{t-1}}$$

On conçoit donc que si l'on a construit la courbe sur une grande échelle, on pourra au moyen de cette échelle et d'un compas, ainsi que nous l'avons dit (n.° I, pag. 19, note), trouver la valeur de y correspondante à une époque quelconque t.

J. G. G.

Sur le Parallélogramme des forces (a).

Le principe connu en statique, sous le nom de *Parallélogramme* ou de *Composition des forces*, forme la base de toute cette science : on en a donné plusieurs démonstrations rigoureuses dont les unes

---

(a) Cette démonstration a été consignée dans le 7.e vol. des Annales belgiques, journal peu connu de nos lecteurs, ensorte qu'indépendamment de son mérite intrinsèque, elle conserve encore le mérite de la nouveauté.

J. G. G.

sont fondées sur des considérations géométriques ou analytiques, et d'autres sur des propriétés de statique, qu'on suppose déjà démontrées (1).

Les auteurs qui ont traité méthodiquement de cette science, ont commencé par démontrer le cas de deux forces égales qui concourent en un même point; il en ont déduit celui de deux forces rectangulaires entre elles, et enfin celui de deux forces de grandeurs et de directions quelconques. Telle est la marche suivie par MM. *Poisson* et *Francœur* (2) dans leurs excellens traités de mécanique. Chacun d'eux a démontré à sa manière le premier cas où il s'agit de déterminer la grandeur de deux forces égales. Qu'il nous soit cependant permis d'observer ici que celle de M. *Poisson* (1.er vol., pag. 15) et dont on ne peut contester le mérite sous le rapport de l'élégance, ne laisse pas d'avoir *quelque obscurité* (3) pour l'élève qui, à cette époque de ses études, n'est pas assez familiarisé avec le calcul différentiel et les applications du théorème de *Taylor*, pour saisir le véritable esprit de cette démonstration. L'auteur paraît l'avoir senti, puisque dans les notes ajoutées à la fin du premier volume, il propose d'y substituer une démonstration purement

---

(1) On en trouve une de la dernière espèce chez *J. Bernoulli*, dans ses *Opera omnia*, Tom. IV, p. 253, où elle est déduite de la théorie du levier recourbé; mais cette théorie ne pouvant précéder celle de la composition des forces, il me semble que la démonstration de ce géomètre, ne peut trouver place dans un traité régulier de mécanique. Voyez l'histoire de ce principe dans *la Mécanique analytique*, 1.re partie, section 1re.

(2) M. *Francœur*, alors répétiteur à l'École polytechnique où il avait été élève, fut chargé par M. *Prony*, professeur dans cet établissement, de recueillir des notes sur ses leçons et de les rédiger : ces rédactions, imprimées et distribuées aux élèves, furent le premier essai de sa Mécanique, remplacée par celle de M. *Prony*, qui depuis eut à soutenir la concurrence avec celle de M. *Poisson*, qui fut généralement adoptée. J. G. G.

(3) Au mot *obscurité*, je substituerais *difficulté* : les démonstrations de MM. *Prony* et de *La Place* sont dans le même cas : celle de M. *Francœur* (Traité de Méc., in-4.°, édit. de 1804, chap. I) est purement analytique, c'est-à-dire, qu'elle ne suppose aucune notion de calcul différentiel : on en a une autre fondée sur la considération *des suites récurrentes* : je la crois de M. *Prony*.

J. G. G.

synthétique, due à M. *Duchayla*, et par laquelle on prouve 1.° que si la résultante est dirigée suivant la diagonale, lorsque les forces sont entre elles comme $m : n$ et comme $m : p$, elle sera encore dirigée suivant la diagonale, lorsque les deux forces seront entre elles comme m et $p+n$: 2.° qu'elle sera représentée en grandeur par cette diagonale. Cette démonstration est à la fois directe et satisfaisante (*a*).

Nous nous proposons dans cet écrit, 1.° de déterminer la résultante de deux forces égales, sans recourir au calcul différentiel; 2.° d'en déduire immédiatement celle de deux forces sous des grandeurs et des directions quelconques.

Soient (*fig.* 1) MB et MC les directions de deux forces dont chacune est égale à P, $2x$ l'angle BMC, et MD la direction de leur résultante, direction qui partagera l'angle BMC en deux angles égaux, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'elle se rapproche plus de l'une que de l'autre force P. L'intensité de cette résultante, que nous désignerons par R, ne peut dépendre que des grandeurs de P et de l'angle x entre P et R; c'est ce que nous exprimerons autrement, en disant que R ne peut être fonction que des quantités P et x : or, pour le même angle x, les forces R et P devant augmenter ou diminuer proportionnellement, c'est-à-dire, devant devenir mR et mP, il s'ensuit que leur rapport ne peut varier qu'avec l'angle x; il doit donc être *fonction* de x, et on aura ainsi

$$(*)\ \frac{R}{P} = \phi x, \text{ d'où } R = P \times \phi x \ldots\ldots\ (1)$$

(*a*) C'est dans le même sens qu'une démonstration a été donnée par M. *Timmermans*, professeur de mathématiques au Collége royal de Gand et élève de l'Université de cette ville, dans sa réponse couronnée à la question de mécanique proposée par la Faculté des sciences, et consignée dans les Annales de 1818-1819. Il commence par la considération de deux forces à angles droits, et il détermine ensuite la résultante de deux forces inégales formant un angle quelconque.

(*) On verra très-aisément que P devenant mP, la résultante R devient mR, en concevant plusieurs systèmes tels que BMC superposés, puisqu'alors les résultantes R seront aussi superposées. On pourrait encore dire : l'intensité de R ne peut dépendre que des quantités P et x dont elle est une fonction inconnue; on aurait donc $R = f\,(P, x)$, f étant comme ϕ un signe de *fonction* ou de

Pour déterminer la forme de cette fonction, je suppose un angle $CMC'=x$; et je décompose la force P en deux forces égales, représentées chacune par P', et agissant suivant les directions MC' et MD : comme P devient la résultante des deux forces P', on aura de même

$$P=P'\times\phi x, \text{ d'où } R=P'\times(\phi x)^2 \ldots\ldots (2).$$

Répétant la même supposition sur l'autre force P qui agit suivant MB, le système des forces P sera remplacé par celui des quatre forces P' dont deux agissent suivant les directions MC' et MB', et les deux autres suivant la direction MD. La résultante des deux premières, sera dirigée suivant MD qui divise encore également l'angle $B'MC'$, et elle sera exprimée par

$$r=P'\times\phi\,(2x);$$

celle des deux autres forces qui agissent suivant MD, aura pour valeur

$$r'=P'+P'=2P'.$$

On aura donc

$$R=r+r'=2P'+P'\times\phi\,(2x)=P'\,(\phi x)^2,$$

en vertu de l'équation (2); et conséquemment, après la division par P',

$$2+\phi\,(2x)=(\phi x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Observons maintenant 1.° que si les droites MB et MC se meuvent en même temps et de la même manière autour de M, pour se rapprocher de la direction MD, et jusqu'à venir se confondre avec elle, la résultante R deviendra alors égale à 2P : d'où il

---

composition. Dans cette relation, R et P sont les seules quantités dont les valeurs numériques varient avec l'unité de force que l'on a prise arbitrairement; mais leur rapport $\frac{R}{P}$ étant indépendant de cette unité, ne doit plus varier avec elle; d'où il suit qu'en divisant par P les deux membres de $R=f(P,x)$, le second ne doit plus contenir P : en sorte qu'on doit poser $R=P\times\phi\,x$, comme dans le texte. On peut voir d'autres applications de cette considération empruntée d'un mémoire de *Lagrange*, dans la deuxième note de la Géométrie de *Le Gendre*.

J. G. G.

suit que pour $x=0$, on doit avoir, d'après (1),

$$R=P\times\phi 0=2P,$$

c'est-à-dire, $\phi 0=2$; 2.° que si ce mouvement continue, les angles x, après avoir passé par zéro, deviendront chacun négatif : mais la résultante restant la même en intensité et en direction; comme si les angles fussent restés positifs, on pourra conclure de (1)

$$R=P\times\phi(-x),\ \text{d'où}\ \phi(-x)=\phi x\ldots\ldots\ (4)\ldots(a)$$

Il suit de là que le développement de ϕx ne doit renfermer que des puissances paires de x, afin que le changement du signe de cet angle, n'en apporte aucun dans la fonction ϕx. On devra donc poser

$$\phi x=2+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+\text{etc}\ldots\ (5),$$

en observant $\phi 0=2$, comme nous l'avons reconnu plus haut : d'où on déduit

$$(b)\qquad (\phi x)^2=4+4Ax^2+\begin{array}{r|l|l|l} A^2 & x^4+2AB & x^6+B^2 & x^8+\text{etc.}\\ +4B & \quad +4C & \quad +2AC & \ldots\\ & & \quad +4D & \end{array}$$

(a) Comme cette propriété est le point capital de la démonstration, on pourrait, ce me semble, lever toute espèce de scrupule, au moyen de cette observation bien simple : si l'on regarde comme positif l'angle DMC, compté à partir du côté fixe MD, on devra regarder l'angle DMB comme négatif : ainsi l'équation (1) est tout aussi bien

$$R=P\times\phi x\ \text{que}\ R=P\times\phi(-x);\ \text{d'où résulte}\ \phi x=\phi(-x).$$

J. G. G.

(b) Il est heureux que M. *Lobatto* ait été conduit au développement du carré d'un infinitinome qui ne se compose que des carrés de chacun des termes et de leurs produits deux à deux, parce qu'alors la loi de composition des coefficiens de x, étant simple et facile à saisir, on peut pousser le développent de $(\phi x)^2$ aussi loin qu'on voudra, et s'assurer, au moins par le fait, que chacune des valeurs des coefficiens B, C, D, etc. dérive de la précédente d'une manière régulière. Ainsi cette démonstration ne peut, à mon sens,

et de plus

$$2+\phi\,(2x)=4+2^2Ax^2+2^4Bx^4+2^6Cx^6+2^8Dx^8+\text{etc.}$$

et comme d'après (3), ces deux équations doivent êtres identiques, on n'aura qu'à égaler les coefficiens des mêmes puissances de x, ce qui donnera ces relations

$A=A$		$A=A$
$A^2+4B=16B$	d'où l'on	$B=\dfrac{A^2}{3.4}$
$2AB+4C=64C$	déduit	$C=\dfrac{A^3}{3.4.5.6}$
$B^2+2AC+4D=256D$	facilement	$D=\dfrac{A^4}{3.4.5.6.7.8}$
etc.		etc.

Ces substitutions faites dans (5), on trouve

$$\phi x=2+Ax^2+\frac{A^2}{3.4}x^4+\frac{A^3}{3.4.5.6}x^6+\frac{A^4}{3.4\ldots8}x^8+\text{etc.},$$

ou bien encore

$$\phi x=2\left[1+\frac{A}{2}x^2+\frac{A^2}{2.3.4}x^4+\frac{A^3}{2.3.4.5.6}x^6+\text{etc.}\right].$$

Or, si dans ce développement connu,

$$\cos.\,x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.},$$

on remplace x par $x\sqrt{-A}$, on tombera sur

$$(a)\qquad \phi x=2\cos.\,(x\sqrt{-A})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

---

laisser aucun nuage, et d'ailleurs elle n'exige que *la méthode des coefficiens indéterminés*, autre circonstance qui la recommande dans son espèce.

J. G. G.

(*a*) En traitant la même question, M. *Prony* est conduit à l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\,(fx)}{dx^2}=qf(x),$$

où il ne reste plus qu'à déterminer la constante A. J'observe à cet effet, que x devenant $\frac{\pi}{2}$, π désignant la demi-circonférence, la résultante R devient nulle, parce qu'alors les forces se trouvent directement opposées : on aura donc

$$R = P \times \phi x = 2P \cos.\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-A}\right) = 0;$$

ce qui suppose

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-A} = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

n étant un nombre entier quelconque : d'où l'on tire

$$A = -(2n+1)^2, \text{ et } x\sqrt{-A} = (2n+1)x,$$

et conséquemment

$$R = P \times \phi x = 2P \cos.[(2n+1)x];$$

mais à $R=0$, répond $\cos.[(2n+1)x]=0$; donc

$$x = \frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1},$$

d'où l'on conclut $n=0$, en observant qu'en effet la résultante ne peut être nulle que pour $2x=\pi$, ou qu'autant que les deux

---

où q est une constante indéterminée : il trouve pour intégrale

$$f(x) = Ae^{x\sqrt{q}} + Be^{-x\sqrt{q}},$$

e étant la base des *logarithmes népériens*, et A et B les deux constantes arbitraires : leur détermination donne $A=1$, $B=1$; ainsi

$$f(x) = e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}};$$

mais on sait que

$$2\cos.(z\sqrt{-1}) = e^z + e^{-z}.$$

Donc, en posant $z = xq^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{q}$, on a

$$2\cos.(x\sqrt{-q}) = e^{x\sqrt{q}} + e^{-x\sqrt{q}};\ \text{donc } fx = 2\cos.(x\sqrt{-q}).$$

Ainsi, par ce tour de solution, M. *Lobatto* a évité une double intégration et tout ce qui s'ensuit.

J. G. G.

forces sont directement opposées, considération analogue à une autre déjà employée plus haut. On a donc enfin

$$R = 2P\cos. x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Ce principe démontré, nous allons en déduire la résultante de deux forces inégales.

Soient (*fig.* 2) MC et MB les directions des forces Q et P : leur résultante R agira suivant une direction inconnue MD qui, à raison de l'inégalité des forces Q et P, fera avec MC et MB des angles y et x. Menons des droites MC′ et MB′ dont la première fasse avec MC un angle x, et la seconde avec MB un angle y : l'angle B′MC′ sera divisé également par la direction MD de la résultante R : si l'on décompose la force Q en deux autres Q′ et Q″, dirigées suivant MC′ et MD, il est évident que l'angle entre Q et Q′, étant le même que l'angle entre R et P, le rapport entre la résultante Q et la composante Q′, sera égal au rapport entre la résultante R et la composante P (1), et qu'aussi sous le même angle, le rapport entre la résultante R et la composante Q, sera le même que le rapport entre la résultante Q et la composante Q″; d'où il suit qu'on aura les deux proportions

$$R : P = Q : Q',\; R : Q = Q : Q'',\; \text{d'où} \left.\begin{array}{r} R.Q' = P.Q, \\ Q^2 = R.Q'' \end{array}\right\} \quad (8)$$

Faisant la même décomposition à l'égard de la force P, et désignant par P′ et P″ les composantes suivant MB′ et MD, on trouvera par le même raisonnement,

$$P.Q = R.P';\quad P^2 = R.P'' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9);$$

les équations (8) et (9) donnent ces conséquences

$$Q' = P';\quad R(P'' + Q'') = P^2 + Q^2 \ldots \quad (10):$$

(*a*) Cette conclusion tient visiblement à ce que les directions des résultantes Q et R, sont symétriques par rapport à leurs composantes Q′ et Q″, P et Q.

J. G. G.

De cette manière les forces P et Q sont remplacées par quatre forces dont deux égales à P', agissent suivant MB' et MC', et les deux autres P'' et Q'', inégales entre elles, sont dirigées suivant MD. Or, d'après la relation (7), et en désignant par (P, Q) l'angle CMB, on a $2P' \cos. (P, Q)$ pour la résultante des forces égales à P'; donc

$$R = 2P' \cos. (P, Q) + P'' + Q'' :$$

mais la première des équations (9), donne $P' = \frac{P.Q}{R}$, valeur dont la substitution dans l'équation précédente, la change dans celle-ci

$$R^2 = 2P.Q \cos. (P, Q) + (P'' + Q'') R :$$

remplaçant $(P'' + Q'')R$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (10), on a enfin

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2P.Q \cos. (P, Q) \ldots\ldots (11);$$

d'où l'on conclut que l'intensité de la résultante R des deux forces P et Q, est représentée par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les grandeurs des composantes.

Il s'agit enfin de lier la résultante aux directions et aux grandeurs données des composantes, par une propriété géométrique qui en fasse trouver facilement la position sur laquelle on portera sa grandeur déjà connue. Soient MR (*fig.* 3) la direction de cette résultante et MD sa grandeur trouvée : sur les prolongemens de DM et BM prenons $MD' = MD$, $MB' = MB$. Si l'on fait agir la résultante R de M vers D', en lui conservant son intensité, elle fera équilibre aux composantes primitives P et Q : donc la force P, par exemple, qu'on ferait agir de M vers B', équivaudrait aux forces $Q = MC$ et $R = MD'$. Cela posé, on aura d'après la formule (11),

$$\begin{aligned} P^2 &= R^2 + Q^2 + 2R.Q \cos. CMD' \\ &= R^2 + Q^2 + 2R.Q \cos. (\pi - y) \\ &= R^2 + Q^2 - 2R.Q \cos. y \\ &= R^2 + Q^2 - 2R.Q \cos. (Q, R). \end{aligned}$$

mais si l'on joint les points C et D, le triangle MCD donnera

$$CD^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 - 2MC \times MD \cos. y$$
$$= R^2 + Q^2 - 2R.Q \cos. y.$$

Donc CD = P = MB : on prouverait de même que BD = MC. Donc enfin la figure MBDC est un parallélogramme qui a pour diagonale la direction et la grandeur de la résultante (1).

M. Lobatto,

Employé au Ministère du Waterstaat et de l'Instruction publique.

NOTE

Sur les Polyèdres réguliers.

Ce n'est qu'après l'impression de l'article sur les polyèdres réguliers, que nous avons trouvé une solution plus simple de la question, qui repose sur trois relations dont les deux premières sont particulières à ces sortes de polyèdres, et la troisième convient aux polyèdres en général. Désignons par

F le nombre des faces d'un polyèdre

S le nombre des angles polyédriques

A le nombre des arêtes,

et supposons, pour en revenir aux polyèdres réguliers, qu'on note

---

(*a*) Cette tournure me paraît préférable à la *réduction à l'absurde* qu'on emploie ordinairement pour établir cette proposition.

J. G. G.

par

f le nombre des côtés, commun à toutes les faces

s le nombre des arêtes, commun à tous les angles polyédriques.

Il est clair 1.° que le produit fF contiendra le double du nombre A des arêtes, puisque la même arête est toujours commune à deux faces; 2.° qu'il en sera de même du produit sS. Si d'ailleurs on emploie le théorème connu d'*Euler* : $S+F=A+2$ (1), on aura les trois équations.

$$fF=2A,\quad sS=2A,\quad S+F=A+2.$$

Ces équations n'éprouvant aucun changement, lorsqu'on y permute à la fois f contre s et F contre S, on en conclut que les polyèdres de cette nature, sont réciproques deux à deux : en sorte que, dans les deux d'un même couple, le nombre A des arêtes est le même, et de plus que le nombre F des faces de chacun, est le même que le nombre S des sommets de l'autre, ce qui permet de les inscrire ou circonscrire l'un à l'autre. De ces équations, on tire

$$A=\frac{2fs}{2(f+s)-fs},\quad F=\frac{4s}{2(f+s)-fs},\quad S=\frac{4f}{2(f+s)-fs}\,;$$

La nécessité d'avoir pour f, s, F, S et A des nombres entiers positifs plus grands que 2, borne les solutions de ces équations aux suivantes

$$\begin{array}{l}
f=3,=3,=4,=3\;,=5\;,=3\;,=6\;,=4\\
s=3,=4,=3,=5\;,=3\;,=6\;,=3\;,=4\\
F=4,=8,=6,=20,=12,=\infty\;,=\infty\;\;=\infty\\
S=4,=6,=8,=12,=20,=\infty\;,=\infty,=\infty\\
A=6,=12=12,=30,=30,=\infty\;,=\infty,=\infty
\end{array}$$

d'où on conclut non-seulement qu'il ne peut y avoir que cinq corps réguliers, mais qu'il ne peut exister que cinq sortes de polyèdres, réguliers ou non, dont toutes les faces aient le même nombre f

---

(1) Dans l'un des numéros suivans, nous donnerons ce théorème avec tous les cas d'exception, précédé d'une notice sur ce qui a été fait sur ce point.

de côtés, et tous les angles polyèdres le même nombre s d'arêtes. On voit, en outre, que la sphère peut, sous trois points de vue, être considérée comme un polyèdre régulier ayant des faces infiniment petites, en nombre infini, ces faces pouvant être ou des triangles réunis six par six, ou des hexagones réunis trois par trois, ou des carrés réunis quatre par quatre; c'est ce qui résulte de la considération des trois dernières colonnes verticales. On voit encore qu'un plan ne peut être exactement couvert avec des polygones d'une même sorte, assemblés en même nombre autour de chaque sommet, que de trois manières différentes, 1.° avec des triangles rassemblés six par six; 2.° avec des hexagones assemblés trois par trois, en observant qu'en supposant infini le rayon de la sphère, on passe au plan; 3.° avec des carrés assemblés quatre par quatre. On voit enfin que les polyèdres réguliers des mêmes couples, c'est-à-dire, ceux qui répondent aux changemens simultanés de f en s et de F en S, sont le tétraèdre avec lui même, l'hexaèdre avec l'octaèdre, le dodécaèdre avec l'icosaèdre; la sphère couverte d'hexagones avec la sphère couverte de triangles, et enfin la sphère couverte de carrés avec elle-même (1).

En désignant par I l'inclinaison mutuelle et égale des faces dans les polyèdres réguliers, M. *Le Gendre*, (Géom. not. IX), a trouvé cette formule très-simple

$$\sin.\tfrac{1}{2}\mathrm{I}=\frac{\cos.\dfrac{\pi}{s}}{\cos.\dfrac{\pi}{f}}$$

En désignant par R et r les rayons des sphères circonscrite et inscrite, le même géomètre a obtenu ce rapport

$$\frac{\mathrm{R}}{r}=\operatorname{tang}.\frac{\pi}{s}\operatorname{tang}.\frac{\pi}{f}$$

Nous renvoyons pour les conséquences à la note citée.

J. G. G.

---

(1) Dans *les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1725, M. *De Mairan* a donné des recherches curieuses sur l'inscription et la circonscription de l'octaèdre au cube, ce qui resterait à étendre aux autres couples de polyèdres.

ASTRONOMIE.

Extrait d'un rapport sur la formation d'un observatoire dans le royaume des Pays-Bas. (1)

Les lumières aujourd'hui sont généralement assez répandues pour qu'on puisse se dispenser de faire l'éloge de l'astronomie, et d'énumérer tous les avantages que l'on peut retirer de cette partie sublime des connaissances humaines. C'est surtout dans un pays dont les vaisseaux ont occupé pendant long-temps l'empire des mers et se sont enrichis des trésors des deux mondes, que l'on doit sentir son heureuse influence ; aussi la Hollande a religieusement maintenu jusqu'à nos jours des sanctuaires où le navigateur peut s'initier aux secrets de l'astronomie; et s'ils n'ont pas toujours eu le même degré de splendeur, du moins ils étaient là comme pour témoigner du respect et de la reconnaissance que la nation conservait pour cette noble science à laquelle elle devait une partie de sa prospérité. Il appartenait à la Hollande de donner au monde savant la première idée de ces instrumens d'optique qui devaient bientôt après dévoiler de nouveaux mystères dans les cieux et découvrir des régions immenses où les regards de l'homme n'avaient pas encore pénétré. Il lui appartenait de produire le plus noble rival de *Newton*, cet illustre *Huyghens* qui marchant toujours d'un pas ferme dans le labyrinthe immense des sciences, s'élevait à la connaissance de la gravitation par celle des forces centrifuges, expliquait les singulières apparences de l'anneau de Saturne, reculait les limites de l'astronomie par ses

---

(1) Ce rapport a été présenté au gouvernement en 1823. Tout semblait faire croire alors à l'établissement prochain d'un observatoire dans nos provinces : l'auteur avait eu une mission pour cet objet, et s'était empressé de soumettre au Roi un projet qui avait eu l'approbation de plusieurs astronomes célèbres : ce projet a été ajourné jusqu'à présent.

ingénieux travaux et par la théorie des pendules, et enfin déterminait les admirables lois de la double réfraction dans les coprs cristallisés. Le nom seul d'*Huyghens* suffirait pour illustrer un pays, si l'on n'avait à citer encore d'autres noms justement célèbres dans les sciences. Pendant que la Hollande s'élevait à cette hauteur, les Pays-Bas qui, pendant long-temps, avaient suivi sa fortune et qui s'enorgueillissaient d'avoir produit les *Grégoire de S.t Vincent* (1), les *Ortélius*, les *Mercator* et le Restaurateur de la mécanique chez les mordernes, le célèbre *Simon Stévin*, les Pays-Bas, dis-je, étendaient de leur côté le domaine des mathématiques et rivalisaient avec les premières nations de l'Europe. Malheureusement l'astronomie, plus gênée dans sa marche, y faisait des progrès moins rapides; à chaque pas elle se trouvait arrêtée par d'aveugles préjugés : à peine débarassée des idées astrologiques, elle avait été enrichie par *Gemma* de l'usage de l'astrolabe (2); elle commençait à s'offrir sous de plus heureux auspices, lorsque bientôt après toutes les espérances furent déçues de nouveau. *Langrenus* avait donné des cartes de la lune : mais au lieu d'appui, il n'avait trouvé que du découragement auprès des gouvernemens étrangers qui dirigeaient le pays : d'autres dégoûts abreuvèrent cette autre victime des sciences, ce malheureux *Philippe De Laensberg*, dont le nom a été si indignement ridiculisé jusque dans sa patrie : ardent défenseur de la vérité, il s'était hâté de soutenir les nouvelles idées de *Copernic* sur le système du monde; son sort fut celui de *Galilée* : il lutta courageusement contre les efforts du fanatisme, et quand il lui devint impossible de résister davantage, il aima mieux s'expatrier que renoncer à sa propre conviction. Ces exemples affligeans n'étaient guères propres à favoriser les progrès d'une science qui veut s'élever et s'agrandir paisiblement dans la retraite et le silence, et qui attend du gouvernement une protection généreuse et éclairée, et non pas des outrages et des persécutions. D'autres motifs produisirent aussi de nouveaux obstacles : on doit les attribuer surtout à l'instabilité des gouvernemens, et à la succession rapide des gouverneurs qui nous étaient envoyés de pays lointains, et dont les uns étaient entièrement étrangers aux

---

(1) Dans le prochain numéro, nous donnerons une notice sur ce géomètre.

(2) Voyez une Dissert. sur cet Astronome, par le prof. *C. Ekama*, Mém. de l'Inst. des Pays-Bas, 1825.

sciences, dont d'autres se bornaient à conserver l'ordre établi, et d'autres enfin portaient leur attention sur des branches plus à la portée de la multitude et ne songeaient guères, dans la courte durée de leur règne, à fonder des établissemens dont la postérité devait recueillir les principaux fruits. Aussi les Pays-Bas jusqu'à nos jours, n'ont jamais eu le bonheur de posséder un observatoire. La connaissance du ciel, moins cultivée que les autres branches des mathématiques, n'était étudiée que dans les livres : l'observation n'y était point suivie; quelques particuliers cependant, poussés par un zèle ardent, faisaient quelques observations isolées (1); mais qui par là même contribuaient peu aux progrès de la science. La formation d'un observatoire paraissait réservée au monarque généreux qui, dès les premières années de son règne, s'empressa de faire jouir les provinces méridionales des mêmes avantages que les provinces du nord, et qui, avec une munificence vraiment royale, les dota en même temps de trois universités. Grâce à cette munificence et au zèle éclairé du ministre qui dirige l'instruction (2), peu d'années ont suffi pour completter les collections d'histoire naturelle, pour organiser les laboratoires de chimie, les cabinets de physique, et pour rassembler tout ce qui est du domaine de la médecine et de la chirurgie. L'astronomie seule presque toujours habituée à se présenter modestement après les autres sciences, tandis que son rang exigerait peut-être qu'elle parût la première, l'astronomie attend encore un asile digne d'elle, et digne d'un Roi protecteur des lumières. Mais ce retard n'est point l'effet d'un injuste oubli ; cette sage lenteur, il faut l'espérer, est plutôt l'effet de la circonspection nécessaire quand il s'agit d'établir un monument tel qu'un observatoire. Les astronomes savent assez combien le choix du local et la construction de l'édifice entraînent de précautions et de soins. D'ailleurs plusieurs questions préalables se présentent à la fois et leur solution a pu causer quelque embarras....... Il paraît donc que l'intérêt du gouvernement

---

(1) Voyez les anciens Mémoires de l'Académie de Bruxelles.

(2) Ce rapport a été écrit pendant le ministère de M. *Falck* qui s'est montré le plus ardent partisan de la formation d'un observatoire. Nous avons lieu d'espérer le même appui dans le ministre éclairé qui lui succède, et qui est si bien secondé par M. *Van Ewyck* qui lui-même est très-initié dans le secret des sciences.

et celui de la science exigent qu'on renonce à la formation de plusieurs observatoires plutôt que d'en établir de médiocres qui avanceraient peu la science, et qui n'acquitteraient point notre patrie de l'obligation qu'elle a contractée de concourir avec toutes les nations civilisées de l'Europe, au perfectionnement du système du monde. Les travaux que l'astronomie laisse encore à faire, sont immenses (1); mais ils exigent tant de soins, tant de précision, tant de constance dans l'observation, que c'est ne rien faire, que de ne pas atteindre à la perfection. De pareilles considérations suffisent pour prouver que l'établissement d'un seul bon observatoire, offrirait assez de difficultés pour qu'on put s'applaudir de les avoir surmontées.

A. Q.

---

(1) On devrait, dans un pareil établissement, observer exactement toutes les éclipses, toutes les occultations d'étoiles pour la rectification des longitudes; on y observerait aussi les mouvemens des planètes et ceux de la lune pour aider à perfectionner les tables dont l'usage est si nécessaire surtout pour les marins; et indépendamment de tous les travaux ordinaires que demande la correction des élémens qui entrent dans le système planétaire, il faudrait s'occuper encore de la recherche des comètes nouvelles et de l'immense travail qui concerne la détermination exacte des étoiles fixes, de manière à pouvoir estimer les mouvemens propres qu'elles auraient, ainsi que les vicissitudes auxquelles elles sont assujéties; on ne saurait apporter aussi trop de soins au perfectionnement des catalogues des étoiles nébuleuses, des étoiles doubles et triples, des étoiles qui semblent tourbillonner les unes autour des autres, ou présenter une parallaxe sensible; on préparerait aussi de loin les données nécessaires pour calculer le mouvement par lequel tout notre système planétaire semble se diriger lentement vers la constellation d'Hercule. On y recueillerait encore des documens qui nous manquent en général sur l'état de l'atmosphère et de la température dans nos provinces. Pour cela il serait nécessaire d'observer avec la plus grande précision chaque jour, à des époques fixes, l'intensité et la direction des vents, l'état thermométrique et hygrométrique de l'air, la hauteur du baromètre ainsi que la direction de l'aiguille aimantée; et, en général, il ne faudrait omettre aucune des observations qui se rattachent à l'astronomie et à la constitution physique de l'atmosphère et du globe. Un pareil établissement devrait offrir encore d'autres avantages particuliers, surtout pour ce qui concerne la navigation, qui est une partie si intéressante pour notre patrie; enfin il serait inutile de parler des découvertes astronomiques qu'on pourrait espérer d'y faire; puisque les indiquer ce serait les avoir faites.

MÉTÉOROLOGIE.

L'histoire de l'évaporation nous a appris qu'à une température donnée, un espace limité n'admet qu'une quantité limitée de vapeur, et qu'aussitôt qu'on diminue ou l'espace ou la température, la vapeur se condense et s'offre à nos regards sous différens états. Suivant *Saussure*, la vapeur au moment où elle se précipite de l'air, se transforme en une multitude de petites sphères creuses, qu'on a désignées sous le nom de *vésicules* : *Saussure* les a examinées à l'aide d'une lentille; il a reconnu qu'elles étaient sphériques : d'ailleurs, placé dans un nuage, il a vu les particules dont il était composé, flotter et voltiger dans l'air avec une legèreté qui prouvait qu'elles étaient denses. *Saussure* s'est de plus assuré, et toujours en se servant d'une lentille, que la fumée qui se forme dans l'air, au-dessus d'un liquide noir, était composé de grains arrondis et blanchâtres.

M. *Fresnel* a donné récemment une explication de l'ascension des nuages, qui est indépendante de la constitution des globules d'eau ou de vapeur vésiculaire qui compose les nuages, et qui est également applicable au cas où un nuage serait formé d'un assemblage de cristaux de neige, extrêmement déliés, comme cela peut avoir lieu dans les hautes régions de l'atmosphère. M. *Fresnel* fonde son explication sur la propriété dont jouissent l'air et les autres gaz, de laisser passer les rayons solaires et même le calorique rayonnant, sans s'échauffer, en sorte que, pour les échauffer, il faut le conctact des corps solides ou liquides échauffés par ces mêmes rayons lumineux ou caloriques. Cela posé, si un nuage est formé de globules d'eau ou de cristaux de glace très-déliés, ces globules ou cristaux s'échaufferont par les rayons solaires, et élèveront ensuite la température de l'air avec lequel ils sont mélangés; de sorte qu'on conçoit que l'air contenu dans l'intérieur d'un nuage

ou très-voisin de sa surface, sera plus léger que l'air ambiant; et lorsque le poids total du nuage, sera plus faible que celui d'un égal volume d'air environnant, le nuage s'élevera.

L'air de l'intérieur du nuage, doit, sans doute, se dégager peu à peu, mais avec lenteur, à cause de la petitesse des intervalles entre les globules, et ce mouvement ascensionnel de l'air, tend encore à élever les nuages.

Pendant la nuit, le nuage est privé des rayons solaires, sa température doit diminuer, et l'on conçoit que s'il a beaucoup d'épaisseur, cette diminution sera lente : d'ailleurs il continue à recevoir les rayons calorifiques envoyés par la terre; ce qui contribue encore à retarder son refroidissement. Au reste, on remarque généralement qu'après le coucher du soleil, les nuages s'abaissent sensiblement, ce qui est conforme à la théorie actuelle (1).

Mais comment un nuage formé de petits glaçons, produira-t-il la pluie? l'explication en est simple : si l'abaissement de température devient assez grand, pour que le nuage l'emporte en densité sur l'air environnant, il tombera, et rencontrant dans sa chute des couches d'air chaud, il pourra se changer en pluie, même dans le cas où il serait formé de glaçons.

On peut, en général, concevoir la formation de la pluie de la manière suivante : soient deux masses d'air saturées, à des températures inégales; on trouvera par la théorie, qu'en vertu de la loi du rapide accroissement de la force élastique des vapeurs, l'espace sera sursaturé, et laissera précipiter une partie de l'eau qu'il con-

---

(1) En admettant l'existence de la vapeur vésiculaire, qui paraît hors de doute, on peut concevoir sa suspension dans l'air par les considérations suivantes : 1.° l'air contenu dans les vésicules, est nécessairement au *maximum* de vapeur d'eau; 2.° l'air interposé entre ces vésicules est au maximum d'humidité, et doit produire un courant ascensionnel propre à soutenir l'ensemble du nuage dans l'atmosphère. 3.° Les nuages peuvent être considérés comme des *écrans* qui, pendant le jour, reçoivent et retiennent le calorique rayonnant du soleil, et pendant la nuit, celui de la terre. Leur température doit donc être supérieure à celle de l'atmosphère transparente qui les entoure, et qui doit accroître leur légèreté spécifique.

J. G. G.

tient. Comme les courans d'air dans l'atmosphère, sont continuels, un semblable mélange peut se rencontrer fréquemment. La précipitation est d'autant plus considérable, que la température est plus élevée : aussi, dans les pays les plus chauds et dans les saisons les plus chaudes, tombe-t-il de l'eau en plus grande abondance. La quantité d'eau qui tombe dans un même pays, dans diverses années, est toujours, à peu près, la même. C'est du moins ce que M. *Arago* a conclu pour Paris, d'après des observations continuées pendant 30 ans. Il résulte des observations de la quantité moyenne d'eau qui tombe annuellement dans différens lieux, que cette quantité est d'autant plus grande, qu'on s'approche davantage de l'équateur, conséquence qui est tout-à-fait d'accord avec ce qu'a reconnu M. *Humbold*, que l'air est d'autant plus humide que le lieu est plus rapproché de l'équateur.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

En réunissant un très-grand nombre d'observations du thermomètre et en les comparant entre elles, M. *Arago* en a déduit les conséquences suivantes : 1.° Dans aucun lieu de la terre et en aucune saison, un thermomètre élevé de deux ou trois mètres au-dessus du sol, et à l'abri de toute réverbération, n'atteindra le 37.me degré de *Réaumur*, ou le 46.me degré de l'échelle centigrade : 2.° En pleine mer, quels que soient le lieu et la saison, la température de l'air, ne dépasse point 24 degrés de *Réaumur*, ou 30° centigrades. 3.° Le plus grand degré de froid qu'on ait observé sur notre globe, avec un thermomètre suspendu dans l'air, est de 40° *Réaumur*, ou 50° centigrades. 4.° L'eau de la mer, sous aucune latitude et en aucune saison, ne prend une température supérieure à 24° *Réaumur*, ou 30° centigrades.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

L'impossibilité d'employer des instrumens mathématiques pour observer la plupart des phénomènes météorologiques, nous force d'a-

voir récours à des moyens d'estimation plus ou moins vagues. Notre jugement est, en général, d'autant plus arbitraire que le phénomène sur lequel nous prononçons, était moins attendu et que nous étions moins préparés à l'observer. C'est ainsi que, pour établir la hauteur à laquelle on a aperçu des aérolithes, on a dû se contenter de prononcer d'après les distances des lieux auxquels ils ont été aperçus en même-temps. On conçoit cependant qu'au moment où un aérolithe vient éclater dans les airs, s'il était observé par deux spectateurs à la fois, de manière à ce que les directions des rayons visuels vers des points connus du ciel fussent parfaitement remarquées, sa position serait tout aussi bien déterminée que si on l'eut observé à l'aide d'instrumens.

Or, pendant la nuit, cette observation devient assez facile : il suffit en effet de connaître l'étoile ou même la constellation qui se trouve dans le prolongement du rayon visuel. Comme la hauteur de chaque étoile est connue à chaque instant, on connaîtra ainsi aux deux stations, la hauteur astronomique du météore : on connaîtra même l'angle compris entre les rayons visuels, puisqu'il sera mesuré dans le ciel par l'arc compris entre les deux étoiles.

Cela posé, examinons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire, celui où les deux points d'observation seraient assez rapprochés pour que les verticales pussent y être considérées comme parallèles : supposons de plus ces points dans le plan de l'horizon. On peut considérer alors le météore comme placé au sommet d'un angle trièdre dont les trois arêtes sont les deux rayons visuels avec la perpendiculaire au plan de l'horizon, et dont les trois angles plans sont donnés par l'observation : l'un est l'angle entre les rayons visuels et les deux autres sont les complémens des hauteurs observées. Or, si l'on coupe alors cet angle trièdre par un plan parallèle à celui de l'horizon, l'intersection donnera un tétraèdre (voyez la construction dans *Monge :* Géom. desc., parag. 22). Ce tétraèdre sera semblable à celui qui a pour sommets les deux points d'observation, le météore et le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de l'horizon. Mais comme on est censé connaître la distance des deux points d'observation, la similitude des tétraèdres fera connaître tous les élémens qui concernent la position du météore, et son élévation dans l'air.

Si l'un des points d'observation n'était pas dans le plan de l'ho-

rizon, l'angle trièdre n'en serait pas moins déterminé, puisqu'on pourrait encore estimer les distances zénithales des rayons visuels : mais il ne suffirait plus de connaître la distance des deux points d'observation pour estimer la hauteur du météore au-dessus de l'horizon; il faudrait avoir encore l'angle que forme la droite qui les joint, avec le plan de l'horizon. Or, on construirait encore, comme précédemment, un tétraèdre en coupant l'angle trièdre par un plan horizontal. Mais on ne pourrait point dire ici que ce tétraèdre est semblable à celui qui a pour sommets les deux points d'observation, le météore et le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de l'horizon, puisqu'un des points d'observation se trouve maintenant hors de ce dernier plan (1). Pour déterminer ce tétraèdre semblable, il faudrait prendre dans le tétraèdre construit le sommet correspondant au point d'observation situé dans le plan horizontal, et en ce point, pris pour sommet, construire un cône dont la génératrice formerait avec l'axe ou verticale un angle égal à celui que forme cette même verticale avec la droite qui joint les points d'observation. Ce cône couperait le second rayon visuel en un point qui serait le quatrième sommet demandé : on pourra alors, au moyen de ce tétraèdre, déterminer toutes les parties du tétraèdre qui lui est semblable et dont on connaît un côté.

Enfin si les deux points d'observation étaient hors du plan de l'horizon, on pourrait ramener la construction à la précédente. Il suffirait, par un de ces points, de faire passer un plan horizontal, et comme on serait censé connaître la hauteur de ce point au-dessus de l'horizon vrai, on aurait toutes les données nécessaires pour déterminer encore la position du météore.

Examinons maintenant ce qui arriverait si les deux points d'ob-

---

(1) On pourra voir un exemple de la construction précédemment indiquée, dans la figure (4) dessinée par M. *Groetars* jeune. Les rayons visuels forment avec les verticales des angles de 50° et 48°, et comprennent entre eux un angle de 60°. La droite $(ac'', a'c')$ ou ac qui joint les observateurs, est supposée inclinée à l'horizon sous un angle de 20°. Les indications précédentes suffiront pour faire comprendre la construction. Connaissant la distance ac qui sépare les deux observateurs, par la similitude des tétraèdres, une simple proportion donnera la hauteur approchée du météore au-dessus de l'horizon.

servation étaient trop éloignés pour pouvoir y supposer les verticales parallèles. En prenant la distance zénithale d'un rayon visuel pour l'angle que forme ce rayon avec la droite qui joint le météore au centre de la terre, on négligerait l'angle compris entre les droites qui joindraient le météore et le point d'observation au même centre. En ce cas, on pourrait, par une première construction que l'on regarderait comme une *hypothèse*, déterminer approximativement cet angle et puis recommencer la construction comme nous l'avons indiqué précédemment; mais une pareille précaution deviendra rarement nécessaire: car pour les observations des phénomènes qui se passent dans l'atmosphère et qui d'ailleurs ne peuvent presque jamais admettre beaucoup de précision, les stations des observateurs ne peuvent être guères très-éloignées.

On pourrait, pour la solution des problêmes précédens, employer encore d'autres procédés graphiques : j'en vais indiquer un pour le premier cas; on l'étendra sans peine aux deux autres.

On fera passer le plan de projection verticale par les verticales des deux observateurs, ce qui sera toujours possible, puisque ces lignes concourent au centre de la terre : ici nous les supposerons parallèles. On pendra pour ligne de terre, la droite qui joint les spectateurs, et ainsi le second plan de projection figurera le plan de l'horizon. On regardera alors les deux verticales comme les axes de deux cônes qui auront pour angles au centre, les distances zénithales des deux rayons visuels (1). Cela posé, le météore devra se trouver sur la ligne d'intersection des surfaces de ces deux cônes.

Déterminons maintenant plus particulièrement sa position. On construira dans le plan horizontal, à l'un des points d'observation, une droite qui fera avec la ligne de terre un angle égal à celui que forme le méridien d'un des observateurs avec la droite qui joint les deux observateurs : par ce même point, on mènera une nouvelle droite qui formera avec ce méridien un angle égal à l'angle azimuthal du météore ou de l'étoile qui est dans sa direction. Si l'on regarde cette dernière droite comme la trace horizontale d'un plan vertical qui contient le météore, le point d'intersection de ce plan avec la ligne

(1) *Monge*, Géom. descript., parag. 73.

d'intersection des deux cônes, donnera sa position. En faisant une construction semblable pour le second point d'observation, on aura un moyen de vérifier la solution du problême.

Ou bien, en faisant les deux dernières constructions à la fois, c'est-à-dire, en traçant dans les deux plans verticaux les directions des deux rayons visuels, et leur point de rencontre, on pourra se passer de construire la ligne d'intersection des deux cônes. Ce dernier procédé devient aussi expéditif que facile ; je ne m'arrêterai pas à l'étendre aux autres cas : un peu d'habitude de la géométrie descriptive indiquera suffisamment la marche qu'il faudra suivre.

Il serait bon d'essayer, avec les données précédentes, de résoudre le même problême par l'analyse pour juger des avantages de l'une ou de l'autre méthode.

On pourrait en employant les procédés précédemment indiqués faire, même sans instrumens, des observations aussi utiles qu'intéressantes; par exemple, on pourrait chercher à savoir quelle est à-peu-près la hauteur à laquelle se montrent les étoiles filantes : il suffirait pour cela que deux observateurs s'entendissent et examinassent, à des heures convenues de la nuit, les étoiles filantes qui se montrent dans des régions déterminées du ciel. Il faudrait indiquer soigneusement pour chacune d'elles, l'instant de son apparition, sa direction etc. : on pourrait aussi convenir de prendre pour point distinctif celui où elle a cessé de paraître : dans le cas où l'on observerait dans le plan vertical qui passe par les deux points d'observation, la solution du problème deviendrait beaucoup plus facile encore, puisqu'on aurait tout de suite la base du triangle et ses trois angles.

Enfin de pareils procédés pourraient encore servir, pendant la nuit, à déterminer la hauteur d'objets terrestres. On ne doit pas perdre de vue que ces moyens ne doivent être employés qu'autant qu'on n'exige point une grande précision dans les résultats.

A. Q.

STATISTIQUE.

Nous avons examiné, dans le cahier précédent, la loi des naissances aux différens mois de l'année ; cherchons maintenant la loi de la mortalité aux mêmes époques. Nous avons pris, comme précédemment, pour unité le nombre moyen des décès et nous avons aussi eu égard à l'inégale longueur des mois. Sur les dix-sept années d'observation que nous avons employées, six ont été prises à partir de 1824 et les autres sont celles qui ont précédé la bataille de Waterloo. Nous avons dû négliger quelques années, parce que ce dernier événement, par sa proximité des murs de Bruxelles, a contribué à déranger l'ordre ordinaire de la mortalité, et s'est fait ressentir encore long-temps après. Un fait assez singulier cependant, c'est que pendant que les lois de la mortalité étaient interverties de cette manière, celles des naissances ne subissaient pas la moindre altération : ce qui semble montrer assez que la mortalité n'a été augmentée que par la présence des étrangers qui sont morts à Bruxelles, et non pas par des maladies contagieuses.

ÉPOQUES DES DÉCÈS.	RÉSULTATS.
Janvier................	1,1724 max.
Février................	1,1096
Mars..................	1,1001
Avril..................	1,0684
Mai....................	0,9955
Juin...................	0,9164
Juillet................	0,8057 min.
Août..................	0,8439
Septembre............	0,8843
Octobre...............	0,9564
Novembre.............	0,9751
Décembre..............	1,1719

On voit qu'ici le terme le plus grand et le plus petit sont encore plus fortement prononcés que dans le tableau des naissances, puisque leur rapport approché est d'environ 3 à 2. On voit aussi que la courbe qui figurerait ces résultats, aurait encore la forme d'une *sinusoïde* et qu'on pourrait en déduire les conséquences posées précédemment.

Une autre observation qui ne peut échapper à l'inspection de ces deux tableaux, c'est que le nombre des naissances est le moins grand lorsque le nombre des décès est également le moins fort; ce qui s'accorde très-bien avec la remarque de *Malthus* que le nombre des naissances augmente lorsqu'il s'est fait un vide dans la population, même à la suite de fléaux destructeurs. D'une autre part, les époques où ces termes atteignent leur *maximum*, coïncident assez bien pendant l'hiver. On pourrait croire que cette coïncidence tient à ce que la mortalité, qui est très-grande parmi les enfans, croit en raison des naissances : nous nous sommes assurés, du moins pour les années que nous avons employées, qu'il n'existe point de différence sensible pour les différens mois.

Il résulte donc de ce qui précède, que la loi des naissances pendant l'année est à-peu-près la même que celle des décès, et que de plus leurs variations coïncident à Bruxelles, et suivent, par un nouveau rapprochement assez singulier, à-peu-près les variations du thermomètre, mais prises dans un sens opposé, c'est-à-dire, qu'à l'époque où le nombre de degrés de l'échelle thermométrique, est le plus fort, le nombre des naissances et des décès est le plus faible; et réciproquement que ce dernier nombre est le plus fort, quand le premier devient le plus faible; d'où l'on est naturellement en droit de conclure que les froids de l'hiver dans nos climats, sont moins favorables que les chaleurs de l'été (1).

A. Q.

---

(1) Nous ferons connaître, dans un prochain cahier, les tables de mortalité pour les hommes et les femmes à Bruxelles, avec quelques résultats qu'on en peut déduire pour les sociétés d'assurances. Nous avons été aidés dans ce qu'avait de plus fatigant la partie mécanique de ce travail, par M. *Morren*, élève à l'Athénée de Bruxelles, qui a eu la constance d'extraire la plupart des données.

NOTE

Sur la Géométrie élémentaire (1).

Il est étonnant que les traités de Géométrie, les meilleurs même, ne traitent point, du moins à notre connaissance, de la détermination du rayon d'une sphère pleine et des propositions qui en dépendent. Cependant la solution de ce problême présente de nombreuses applications, et l'on n'y supplée ordinairement que par des moyens approximatifs. Nous allons tâcher de remplir cette lacune et d'offrir quelques propositions qui sembleraient devoir trouver place dans les ouvrages élémentaires à l'endroit où l'on traite des propriétés de la sphère.

1. *Une sphère pleine étant donnée, déterminer son rayon.*

D'un point pris pour pôle sur la sphère et d'une ouverture de compas quelconque, on décrira une circonférence : on prendra alors trois points, sur cette circonférence, et on les considérera comme les sommets d'un triangle inscrit. Or, les côtés étant connus, on pourra sur le papier construire le triangle, et conséquemment le cercle auquel il est inscrit.

Le diamètre de ce cercle peut être considéré sur la sphère comme la base d'un triangle inscrit dont le sommet est au pôle, dont les deux autres côtés sont égaux à l'ouverture de compas qui a servi à décrire la circonférence. Puisqu'on connaît les trois côtés de ce nouveau triangle, on pourra le construire et le cercle auquel il sera inscrit, sera évidemment un grand cercle de la sphère. Nous connaîtrons donc le rayon demandé.

2. *Une sphère pleine étant donnée, tracer sur sa surface une circonférence de grand cercle.*

---

(1) Cet article n'a pu être mis à sa place, parce que l'impression du numéro était déjà avancée, lorsque mon collègue, M. *Quetelet*, me l'a adressé.

J. G. G.

On commencera par déterminer un grand cercle de la sphère, comme nous l'avons fait précédemment, puis on y inscrira un carré, et avec une ouverture de compas, égale à un côté de ce carré, d'un point quelconque de la sphère, on décrira une circonférence qui sera celle que l'on demande.

3. *Un point étant donné sur une sphère pleine, construire le point diamétralement opposé.*

D'après le théorème précédent, du point donné comme pôle, on décrira sur la sphère une circonférence de grand cercle; puis avec la même ouverture de compas et de deux points de cette circonférence, on décrira deux arcs qui se couperont à l'un et l'autre pôle.

4. *Sur une sphère pleine, tracer un nombre de méridiens également distans entre eux.*

On construira sur un plan une circonférence de grand cercle de la sphère (1); on la partagera en un nombre n de parties égales; on reportera alors cette circonférence sur la sphère (2) avec les points de division, et il ne restera plus qu'à faire passer par ces points, des grands cercles perpendiculaires au plan de celui qu'on vient de construire. Il suffira pour cela que leurs pôles respectifs soient situés sur la circonférence de ce dernier.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur les applications nombreuses que l'on pourrait faire du premier théorème. Ce que nous venons de dire, suffira pour indiquer la marche qu'il faudrait suivre pour résoudre les problêmes qui concernent la construction des globes géographiques.

A. Q.

NOTE

Sur la détermination des foyers d'une section conique.

Dans l'analyse donnée pag. 47, et qui a pour objet la détermination *des foyers d'une section conique,* nous avons oublié de

citer un beau théorème dû à M. *Dandelin*, membre de l'Académie royale des sciences et lettres de Bruxelles, qu'on trouve dans le *second volume des Nouveaux mémoires de cette Académie*. En voici l'énoncé : si l'on coupe un cône droit par un plan quelconque, et qu'on mène deux sphères tangentes au cône et au plan transversal, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de ce plan sécant, les points de contact du plan sécant par les deux sphères, seront les foyers de l'ellipse intersection du cône et du plan. En appliquant, dit l'auteur, le même raisonnement à l'hyperbole et à la parabole, on conclura généralement l'énoncé du théorème suivant : *Si l'on fait mouvoir dans un cône droit une sphère, et que, dans une position quelconque de cette dernière supposée tangente au cône, on lui mène un plan tangent, l'intersection de ce plan et du cône, aura pour foyer le point de contact de la sphère et du plan : si le plan sécant est assujetti à passer par un point constant situé sur le cône, et à être perpendiculaire au plan de ce point et de l'axe du cône, pour chaque position de la sphère, on n'aura plus qu'une position du plan tangent qui puisse donner une section, et les foyers de ces diverses sections, seront tous sur le plan de l'axe et du point fixe : ainsi, dans cette hypothèse, la série des foyers fournira une courbe plane continue, et c'est cette courbe que M.* A. Quetelet a nommée *Focale*. Dans ce mémoire, M. *Dandelin* donne plusieurs propriétés remarquables de cette courbe.

J. G. G.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Annales de l'Université de Gand, 1822 – 1823.

La question mathématique proposée en 1822, par l'Université de Gand, est la suivante :

Requiritur 1.° *Enunciatio generalis principii velocitatum virtualium* (Principe des vitesses virtuelles); 2.° *Expositio historica graduum per quos ad id principium perventum est;* 3.° *Demonstratio hujus principii in Vecte sive rectilineo, sive angulari, nec non in Machina funiculari, in Trochlea, in Plano inclinato, in Cuneo, in Cochlea, et denique in Rotis dentatis, tali modo absolvenda ut inde eruantur conditiones jam cognitæ æquilibrii in variis hisce machinis.*

La réponse couronnée est de M. *J. B. Guinard*, de l'Université de Gand, aujourd'hui docteur en sciences et en médecine : elle est divisée en quatre parties :

1.° *Introductio.*

2.° *Pars prima : demonstrationes principii celeritatum virtualium.*

3.° *Pars secunda : applicationes hujus principii.*

4.° *Pars tertia : aliæ applicationes ejusdem principii.*

Dans son introduction, l'auteur a mis à profit le texte des seize premiers numéros de la première section de la mécanique analytique de *Lagrange* qui, sans contredit, était de tous les géomètres modernes, le plus versé dans l'histoire de la science; il a abrégé ce qui devait l'être dans son plan; il a développé certains passages que l'illustre auteur de la Mécanique analytique avait dû resserrer; enfin il y a ajouté de son érudition propre. Cette partie du mémoire

qui ne comporte pas d'analyse, nous a paru répondre pleinement au second membre de l'énoncé, et nous croyons qu'elle sera lue avec intérêt et même avec fruit.

On trouve les premiers matériaux d'une démonstration générale du principe en question, dans un mémoire de M. *Fourier*, inséré dans *le cinquième cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique* si célèbre alors, et à laquelle il était attaché comme Professeur : il dit d'*Aristote* : « Ce philosophe paraît avoir connu les principes » les plus importans de la mécanique : il expose en termes précis » celui de la composition des mouvemens, il a même eu l'idée de » la manière dont les forces centrales agissent dans les mouve- » mens en ligne courbe. Son explication physique de la cause de » l'équilibre des poids inégaux, dans le levier, est ingénieuse, » quoiqu'imparfaite. Ailleurs il enseigne que les forces sont égales, » lorsque les masses sont réciproquement proportionnelles aux vites- » ses. Voilà, dit M. *Fourier*, ce qu'il me semble avoir reconnu dans » ses Traités, à travers mille obscurités et une foule d'idées sin- » gulières, ou qui paraissent aujourd'hui incohérentes. On peut » ajouter que ses écrits offrent les premières vues sur *le principe* » *des vitesses virtuelles* » et c'est probablement en réponse à cette dernière assertion, que M. *Guinard*, dans la dernière note de son introduction, dit : *sunt etiam qui en ejus libris videre se crediderunt ab eo ipsummet celeritatum virtualium principium præsentitum et indicatum esse.* Nous nous bornerons à observer que *Lagrange* ne fait aucune mention d'*Aristote*.

Dans la première partie, le jeune auteur démontre d'abord le principe pour le cas où les forces conspirent en un point unique; il observe qu'alors les vitesses virtuelles peuvent être quelconques, c'est-à-dire, finies ou infiniment petites; il l'étend à l'hypothèse où le point sollicité est assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface courbe. Passant de là au cas général, il expose en détail les démonstrations de *Carnot*, de *Lagrange*, de *Prony*, de *La Place* et de *Poisson*. Sur la seconde démonstration de *Lagrange*, il fait cette observation qui nous paraît fondée : *Hæc demonstratio, licet primo intuitu, nulli objectioni obnoxia videatur, tamen attendenti quasdam offert difficultates quas irresolutas et peritiori enodandas relinquimus*. Sur la démonstration de *Prony*, il pouvait

se permettre d'observer qu'elle suppose connues les six conditions d'équilibre d'un corps solide et libre, et, comme le dit M. *Fourier*, dans le mémoire cité plus haut : « J'ai pensé qu'il ne suffisait pas » de prouver d'une manière absolue, la vérité de la proposition, » mais qu'on devait le faire indépendamment de la connaissance » que nous avons des conditions de l'équilibre dans les différentes » espèces de corps, puisqu'il s'agit de considérer ces conditions » comme des conséquences de la proposition générale. »

Tel est, en résumé, la première partie du mémoire que nous essayons de faire connaître : il est probable que, plus tard, l'auteur de cette pièce aurait eu à ajouter quelques démonstrations du même principe, dues aux Géomètres de notre pays (1).

Je dois à l'amitié de l'auteur de l'histoire des mathématiques, l'*abbé Bossut*, membre de l'*Institut de France*, un écrit qu'il a bien voulu me permettre de consigner dans mes *Leçons de Statique*, et qui forme, à quelques développemens et additions près, la seconde partie de la pièce de M. *Guinard*. M. *Bossut* qui a étudié, comme on le sait, la partie historique de la science et qui a assisté, en quelque sorte, à la création de la Mécanique, science toute moderne, s'exprime ainsi dans l'introduction en tête de cet écrit, et que j'ai rapportée dans l'ouvrage cité. « Le principe des vitesses virtuelles dont quelques auteurs prétendent que » le germe se trouve dans les écrits de *Gallilée* (2), n'a commencé » à être employé avec succès que depuis la notion claire et distincte que *Jean Bernoulli* en a donnée dans une lettre écrite » en 1717 à *Varignon*, et rapportée par ce dernier dans sa mécanique (Tom. II, Sect. IX, pag. 174). *Varignon* présente ce » principe comme un corollaire de la composition et de la décom-

---

(1) Nous devons citer en faveur de ceux qui voudraient se livrer à ces recherches, une note sur la pag. 53 de *l'Architecture hydraulique de Belidor*, avec les additions de M. *Navier*, ingénieur au corps royal des ponts et chaussées de France, ouvrage imprimé chez *Firmin Didot*; et surtout un beau mémoire de M. *Poinsot*, 13.e *cahier du Journal de l'École Polytechnique*.

(2) Ainsi l'*abbé Bossut* ne l'a pas découvert dans les ouvrages qui nous restent du *Précepteur d'Alexandre*.

» position des forces; de sorte qu'ayant établi le principe des » machines simples par le second moyen, il conclut ensuite que » le principe des vitesses virtuelles, a également lieu dans chaque » cas de l'équilibre : il est entré à ce sujet dans certains détails » qui sont incomplets et insuffisans à cet égard. » Il ajoute : « *Lagrange* le considère comme une loi primordiale de la Méca- » nique, et il en fait la base de formules générales qui fournissent » la solution de tous les problêmes de statique ou de l'équilibre » des forces. Ce même principe combiné avec celui de *Jacques Ber-* » *noulli* et de *D'Alembert*, donne aussi la solution de tous les » problêmes de la communication des mouvemens, puisque *D'A-* » *lembert* a fait voir, en général, que la solution des derniers » problêmes, était toujours réductible à ceux des problêmes de » l'équilibre. » Comme M. *Lagrange* n'a pas fait l'application de ce principe à l'équilibre des machines, je me suis proposé de la faire en n'employant que la simple Géométrie élémentaire. « On peut maintenant reconnaître à quelle source ont puisé les auteurs qui, tout récemment, ont traité le même sujet. » C'est encore un point qu'il était bon d'éclaircir.

Comme le champ des applications du principe des vitesses virtuelles, est immense, M. *Guinard* a dû faire un choix, et d'abord il l'a appliqué à la recherche des six équations d'équilibre d'un corps solide et libre, démontrées pour la première fois par *D'Alembert*, dans ses *Recherches sur la Précession des équinoxes*, et depuis plus simplement par différens auteurs. Sous le titre : *De nonnullis proprietatibus quibus gaudet centrum gravitatis systematis in æquilibrio constituti*, M. *Guinard* donne le principe de *Maupertuis*, connu sous le nom de *Loix du repos*, et celui du *Marquis de Courtivron*. Dans une note, il s'attache à présenter une notion précise des *forces vives*, dont il tire leur expression, note qu'il termine par un complément à son introduction, tiré d'un mémoire fort intéressant de M. *Binet*, inspecteur des élèves à l'Ecole Polytechnique, qu'on trouve dans le 19.ᵉ cahier du Journal de cette Ecole, sous le titre : *Sur les principes généraux de Dynamique, et, en particulier, sur un nouveau principe de Mécanique générale*, mémoire que nous nous proposons d'analyser dans l'un des numéros suivans. Enfin le dernier titre : *De velocitatibus virtualibus finitis*, con-

tient la substance des recherches de M. *Fossombroni, géomètre italien;* l'auteur le termine par cette phrase : *Non amplius immorabimur huic arduæ materiæ quam ex omni parte in sua dissertatione dilucidavit* Fossombroni.

Il serait facile de provoquer par une question, une suite à la dissertation dont nous venons de rendre compte, et qui fournirait avec le mémoire de M. *Guinard,* un corps de doctrine sur les principes généraux *de la Dynamique.*

J. G. G.

La faculté des sciences de la même Université, avait proprosé cette question :

Data duorum locorum differentia latitudinis et linea loxodromica, invenire differentiam longitudinis eorumdem.

La réponse couronnée est de M. *Verdam,* élève de l'Université de Leyde (n.° I. de la Corresp.) : elle est divisée en quatre parties :

1.° *Prologus.*

2.° *Caput primum. De linea loxodromica ducta in sphæroïdis superficie, et tanquam linea curva duplicis curvaturæ considerata.*

3.° *Caput secundum. Expositio eorum quæ ad quæstionis solutionem conducunt.*

4.° *Caput tertium. Solutio quæstionis propositæ* que l'auteur, s'est cru, avec raison, obligé de diviser en deux autres, ayant pour énoncés : 1.° *data duorum locorum differentia latitudinis (crescentis) et linea loxodromica, invenire differentiam longitudinis eorumdem?* 2.° *data duorum locorum differentia latitudinis, et linea loxodromica, id est, dato tum angulo loxodromico, tum lineæ loxodromicæ longitudine a primo loco ad alterum, invenire differentiam longitudinis eorumdem?*

5.° *Appendix. Constructio projectionum lineæ loxodromicæ.*

Je ne m'arrêterai pas sur la première partie dans laquelle l'auteur discute le sens dans lequel il doit prendre l'énoncé, puisqu'enfin, dans son troisième chapitre, il traite la question *sensu latissimo.*

Murdoch, dans un ouvrage ayant pour titre : *Nouvelles Tables*

loxodromiques, ou etc., traduit de l'anglais par *Brémond*, de la société royale de Londres, après avoir observé que par la différence de latitude donnée, on doit entendre que les deux latitudes sont connues, et que lorsqu'on cherche la différence de latitude, on entend qu'une latitude est donnée, avec la position de l'autre, sous-divise le problême en cinq autres qu'il résout successivement. On devait s'attendre à trouver ici les noms des *Bernoulli* et particulièrement celui de *Jacques*, à l'occasion de son *specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromiis nautarum, etc.*, pag. 442 du 1.er vol. de ses œuvres. Au reste, ce n'eût été qu'un pur document historique, parce que ce grand géomètre traite la question dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre. Mais M. *Verdam* aurait tiré plus de fruit du chap. VII du traité de topographie, d'arpentage et de nivellement, de *Puissant*, officier supérieur au corps royal des ingénieurs géographes de France. Du reste, il a puisé à de très-bonnes sources.

Dans le chapitre premier, après avoir démontré que la loxodromique est une courbe à double courbure qui tend par des circonvolutions ou des spires, vers chacun des pôles sans pouvoir l'atteindre (1), l'auteur se propose de rechercher les équations en coordonnées polaires, des projections de cette ligne sur deux plans rectangulaires dont l'un est le plan même de l'équateur qui se présentait naturellement, et l'autre est le plan du méridien elliptique qui passe par le point où la loxodromique coupe l'équateur : il s'occupe d'abord de la projection horizontale, c'est-à-dire, sur le plan de l'équateur; et, comme on devait s'y attendre, il trouve que pour le sphéroïde comme pour la sphère, cette projection est du genre des spirales, et qu'elle fait un nombre infini de circonvolutions autour du centre : il lui était facile de donner les expressions des sous-tangente et sous-normale et celle du rayon de courbure; mais il se borne à assigner la longueur d'un arc quelconque de la loxodromique, et il parvient à cette conclusion : *longitudo curvæ lineæ*

(1) Si la loxodromique pouvait passer par le pôle, il faudrait qu'à ce point, elle fît le même angle avec tous les méridiens. Ainsi chaque pôle est un point symptotique.

proportionalis est longitudini ellipseos cujus axis major æqualis est axi majori meridiani elliptici, et cujus excentricitas $= \sqrt{\frac{1+e^2}{\sigma^2}}$, *ubi* σ^2 *denotat quadratum secantis anguli loxodromici :* e désigne l'excentricité du méridien elliptique. Il trouve ensuite l'équation différentielle en coordonnées polaires de la projection verticale de la même courbe; mais malheureusement elle n'est intégrable par aucune des méthodes connues, pas même dans le cas de la parfaite sphéricité de la terre; tandis que la première s'intègre généralement et donne lieu à une relation très-simple dans le cas de la sphère. En attaquant d'une autre manière la question de la rectification de la loxodromique, étendant l'intégrale de l'équateur au pôle, et représentant cette longueur par L, il arrive à cette relation curieuse $L = \sigma E$, où E dénote le quart de la périphérie de l'ellipse dont le grand axe est le diamètre de l'équateur, l'excentricité $= \frac{e}{\sigma} \sqrt{1 - e^2 + \sigma^2}$, $\sigma = 1 + \tau^2$, et τ désigne la tangente de l'angle loxodromique. Telle est la substance du premier chapitre qui ne peut comporter une analyse plus détaillée.

L'auteur annonce lui-même en ces termes la matière du second chapitre : *In hoc capite secundo, mihi proposui invenire longitudinem geographicam et longitudinem lineæ loxodromicæ in functione anguli loxodromici et latitudinis loci dati :* pour simplifier, il compte les longitudes du point où la loxodromique coupe l'équateur. La première de ces relations devient très-simple, en passant du sphéroïde à la sphère. Mais avant d'aller plus loin, il donne la formule *des latitudes croissantes* (1), ce qui se rapporte *aux cartes réduites* imaginées par *Mercator* et *Wright*, préférables *aux cartes plates* dont l'invention est attribuée à *Don Henri*, infant de Portugal : sur ces cartes, la loxodromique devient une droite coupant

(1) Il me semble que, dans ce chapitre qui d'ailleurs est intéressant et bien traité, la recherche de la formule des latitudes croissantes, laisse à désirer du côté de la netteté : nous pensons donc que si M. *Verdam* avait eu connaissance du *Traité de Topographie* de M. *Puissant*, cité plus haut, il aurait profité de ce qu'on y trouve, n.° 82, sous le titre : *Formules pour calculer les latitudes croissantes, en ayant égard à l'applatissement de la terre.*

les méridiens parallèles sous des angles égaux : il reprend ensuite la première relation entre la longitude géographique, l'angle loxodromique et la latitude, pour l'accommoder aux évaluations numériques, et, à cet effet, il la développe en série et il remplace l'excentricité par l'applatissement $\frac{1}{334}$. Le reste du chapitre est consacré à la solution du second problême, et il parvient à une formule en série qui exprime la longueur de la loxodromique depuis le point où elle coupe l'équateur, jusqu'à un point dont la latitude est connue.

Le chapitre III.[e] comprend, à proprement parler, la solution de la question proposée, que l'auteur a conçue et résolue de deux manières. Il se propose, en premier lieu, de trouver la différence des longitudes, étant donnés la différence des latitudes croissantes des deux lieux, ou plutôt ces latitudes croissantes, ainsi que l'angle loxodromique : comme il a déjà obtenu dans le chapitre précédent, une formule qui lui donne la longitude au moyen de la latitude et de la tangente de l'angle loxodromique, la solution de cette question n'exige plus que des calculs numériques. Dans la seconde, où on donne la différence des latitudes, et la ligne loxodromique, c'est-à-dire non-seulement l'angle loxodromique, mais la longueur de la loxodromique d'un lieu à l'autre, et où il faut trouver la différence de longitude de ces lieux, l'auteur parvient à trois formules par l'une desquelles il peut calculer la somme $\lambda'+\lambda$ des latitudes, et conséquemment connaissant leur différence, il connaît ces latitudes en particulier : cette formule renferme $l'-l$, c'est-à-dire la longueur de la loxodromique et la sécante de son angle; l'autre lui fait connaître la différence $\phi'-\phi$ demandée. Ce chapitre ne laisse rien à désirer. M. *Verdam* le termine par cette phrase : *Series omnes atque functiones quas inveni, sufficiunt ad solvendas omnes quæstiones quæ in Astronomia nautica de linea loxodromica proponi possunt : sed causam non video cur illas quæstiones earumque solutiones hic præberem, cum meum specimen inutiliter talibus extenderem, quæ non postulantur;* et, en effet, on ne peut reprocher à M. *Verdam*, d'avoir resserré le champ de la question.

Quant à l'appendix dont le sujet est suffisamment annoncé par son titre, nous nous bornerons à citer ce passage de l'auteur :

Neque etiam exponam constructionem projectionum lineæ loxodromicæ in sphæroïdis superficie ductæ; nam quamvis fieri possit talis constructio, tamen nimis est implicata : sed quandoquidem differentia axeos telluris et radii æquatoris vel minima est, ideoque sphæroïs non multum differt a globo, si tum de sphæroïde, tum de sphæra hæ projectiones fuissent factæ, tam exigua esset figurarum differentia quæ sensibus fortasse observari non posset.

Nous avons lu cette dissertation avec intérêt; cependant nous devons dire que nous avons été quelquefois arrêtés par quelques défauts de liaisons et quelques fautes typographiques toujours inévitables dans une composition aussi chargée de formules.

J. G. G.

Annales de l'Université de Leyden, 1823 — 1824.

Il nous reste à rendre compte de la réponse à la question proposée par l'Université de Leyden, dont l'énoncé est celui-ci :

Horologium solare inscribatur utrimque plano, quod transit per α et ζ Orionis et Observatorium Leidense.

L'auteur du mémoire que nous allons analyser en peu de mots, est M. *Boudewin Donker Curtius*, candidat en Mathématiques et en Philosophie naturelle à Leyden.

La *Gnomonique* est une science faite depuis long-temps, puisque déjà le fameux *Diogène* ne reconnaissait aux cadrans solaires d'autre utilité que d'appeler les gens à diner. Avant *Monge*, elle fournissait matière à des traités volumineux : lorsque ce grand Géomètre eut créé la Géométrie descriptive et l'analyse appliquée, elle s'est réduite à quelques pages, comme on peut le voir dans les Traités modernes d'Astronomie, dans la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique et dans le Journal de cette même Ecole. Je citerai, en particulier, *la Gnomonique ou Théorie des Cadrans solaires*, par M. *Berroyer*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique (Addit. au 3.e vol. de l'Astronomie physique *de Biot*, pag. 51 et suiv.)

Ainsi la question dont il s'agit est résolue analytiquement, comme toutes celles qu'on peut proposer sur le même fonds, sauf la

détermination numérique des élemens de position du plan du cadran; le surplus, c'est-à-dire, le tracé des lignes horaires ne présente aucune difficulté. Nous ne parlerons pas de la méridienne du temps moyen, ni de la courbe diurne, puisqu'il n'en est pas question dans l'énoncé.

La solution se compose de celles des six problêmes, savoir :

Probl. I. *Data altitudine unius stellæ, veluti ζ Orionis, invenire altitudinem stellæ α, ad idem temporis momentum?*

Probl. II. *Data altitudine stellarum α et ζ Orionis, invenire stellarum azimutha?*

Probl. III. *Datis stellarum α et ζ Orionis altitudine et azimutho, invenire plani quod per illas transit, declinationem, sive azimuthum?*

Probl. IV. *Data stellarum α et ζ Orionis altitudine, invenire plani inclinationem?*

Probl. V. *Data plani positione, invenire positionem substylaris et angulum quem stylus cum plano facit?*

Probl. VI. *Ducere lineas horarias in plano per α et ζ Orionis et observ. Leid. transeunte?*

Qui indiquent très-nettement la marche de l'auteur, et qui nous dispensent de tout détail à cet égard.

Le dispositif du calcul est bien entendu. Nous signalerons quelques légères erreurs qui prouveront à l'auteur que nous n'avons pas glissé légèrement sur son mémoire.

La fig. 1.re n'est pas en concordance avec le texte qui annonce la déclinaison de α boréale, et celle de ζ australe (pag. 7).

On trouve (pag. 13) une faute de calcul dans le log. sin. ZC, qui doit être 9,8498613, d'où $ZC=45^\circ\ 2'\ 49''$, et l'inclinaison $I=44^\circ\ 57'\ 11''$, au lieu de $47^\circ\ 28'\ 42'',5$, inclinaison trouvée par l'auteur ;

Il est dit (pag. id. fig. 2) que l'angle ZOC est complément de COF, ce qui est une erreur sans influence sur le reste.

On trouve (pag. 14), $BZC=90^\circ-\delta$, au lieu de $BZC=\delta$: c'est qu'après avoir représenté la déclinaison du plan par δ, il prend maintenant δ pour l'azimuth.

L'auteur du mémoire a peut-être déjà reconnu ces légères erreurs, et trouvé le moyen de simplifier, ou d'abréger sa solution.

J. G. G.

Notice historique sur le Baromètre. (1)

En 1630, *Jean Rey*, médecin de Bergerac, avait deviné la pesanteur de l'air, en voyant que le plomb augmentait en poids par la calcination (2).

Dix ans après, *Galilée* l'avait prouvée, en pesant successivement un vase rempli alternativement d'air comprimé et d'air non comprimé.

Toricelli, méditant sur les effets de cette pesanteur, comprit bientôt qu'elle seule pouvait être la cause de l'ascension de l'eau dans les pompes, et, par analogie, il fut conduit à la construction du baromètre. Cette découverte, l'une des plus belles et des plus utiles qu'on ait faites dans la physique moderne, eut lieu en 1643.

En peu de temps, elle fut connue du monde savant, et le génie prodigieux de *Pascal*, en eut bientôt saisi toutes les conséquences : il annonça la dilatabilité de l'air : d'après ses vues, fut faite cette belle expérience du Puy-de-Dôme, qui établit d'une manière certaine la pesanteur de l'atmosphère.

Boyle, en 1650, au moyen de la machine pneumatique que *Otto de Guérike* venait d'inventer, et en plaçant un baromètre

---

(1) De pareilles notices sur les instrumens qui servent aujourd'hui à la physique expérimentale, et sur les théories et les hypothèses qui en constituent la partie rationnelle, formeraient une histoire très-intéressante et très-succincte de cette science, qu'il serait ensuite facile de tenir au niveau de ses progrès. C'est la question proposée par l'Université de Liège, qui a provoqué les recherches qui font la matière de cette notice.

J. G. G.

(2) *Aristote* avait annoncé la pesanteur de l'air aux philosophes de son temps; mais ce n'était qu'une conjecture qu'il n'avait pas soumise à l'épreuve de l'expérience, et deux mille ans se sont écoulés avant qu'on ait constaté cette propriété.

J. G. G.

sous le récipient de cette machine, fit voir aux Anglais que l'air seul tenait le mercure suspendu.

Dès lors on chercha à appliquer cet instrument à la mesure des hauteurs des montagnes. *Mariotte* et *Halley* furent les premiers qui s'occupèrent de ces applications. Dans un mémoire présenté par le dernier à la Société Royale de Londres, en 1685, on trouve la formule suivante déduite des propriétés de l'hyperbole

$$X = 18951^{metres} \times D$$

X étant la différence de niveau, et D la différence des logarithmes des hauteurs des colonnes métalliques.

Elle diffère peu de celle que M. *Bouguer* trouva 68 ans après, c'est-à-dire, en 1753, dans son voyage au Pérou, et qui est

$$X = 10000^{toises} \left(1 - \tfrac{1}{50}\right) D \quad (1)$$

Tobie Mayer prétendit que, pour nos climats, on peut se contenter de celle-ci

$$X = 10000^{toi.} \times D$$

D ayant dans ces deux formules la même acception que ci-dessus.

Nous ne mentionnerons pas les formules données par *Maraldi*, en 1682; par les frères *Scheuchzer*, en 1727; par *Daniel Bernoulli*, en 1737, parce qu'elles n'ont pas même l'exactitude des précédentes.

Deluc suivit de près *Bouguer;* ce physicien célèbre fait époque dans l'histoire du baromètre. Le premier, il tint compte des effets de la chaleur sur l'air et sur le mercure, et soumettant ces effets au calcul, il les fit entrer dans sa formule qui est la suivante

$$X = 10000^{toi.} (1 + 0{,}003721) [\alpha - 20{,}9375] (D \times 0{,}000081 . \zeta)$$

où α représente la température moyenne entre les deux stations, ζ la différence entre les indications du thermomètre fixé au baromètre, et D la même valeur que ci-dessus; cette formule aurait été plus exacte, s'il ne s'était glissé une erreur dans la mesure

(1) Puisque, dit-il, les hauteurs sont proportionnelles aux logarithmes des élévations du mercure, il suffira de chercher par quel coefficient constant, il faut multiplier leur différence.

géodésique du *Saleve* (montagne de la suisse) où M. *Deluc* fit ses expériences, erreur qui joint à un vice dans sa manière d'observer, lui firent placer trop haut le degré du thermomètre, auquel la correction relative à la température est nulle, en employant le coefficient 100000.

Les formules du général-major *Roy* et *Schuckburg*, données en 1777, et de *Tremblay*, en 1781, ne diffèrent de la précédente que par les facteurs dépendans des effets de la chaleur sur l'air et sur le mercure : ils se sont appliqués à conserver le facteur 10000, et si je ne me trompe, la conservation de ce coefficient, leur a fait compliquer le facteur relatif à la température.

Enfin M. le marquis *De La Place* à la sagacité duquel les erreurs commises avant lui, n'avaient pu échapper, exprima avec plus de précision qu'on ne l'avait fait avant lui, la quantité dont la chaleur dilate l'air et le mercure, et le premier il fit attention aux différens changemens de température, à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, ainsi qu'aux variations de poids du mercure, suivant la latitude et la verticale. Enfin le coefficient constant 18336 ayant été déterminé avec le plus grand soin par M. *Ramond*, M. *De La Place* a donné dans le X.ᵉ livre de la *Mécanique céleste*, la formule suivante

$$X = 18336^{\text{met.}} (1 + 0{,}002837 \cos. 2\psi) \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)$$

$$\left\{ \log. \frac{h'}{h\left(1 + \frac{T'-T}{5550}\right)} + X \left(\frac{\log. \frac{h'}{h\left(1+\frac{T'-T}{5550}\right)} + 0{,}868589}{a} \right) \right\}$$

où X désigne toujours la différence de niveau, ψ la latitude de l'observateur, t' et t les degrés des thermomètres libres, T′ et T les degrés des thermomètres fixés aux baromètres, h' et h les hauteurs des colonnes métalliques, rapportés aux stations inférieure et supérieure, et a le rayon de la terre.

Postérieurement, MM. *Biot* et *Arago* ont donné une formule barométrique dont la démonstration est tout-à-fait élémentaire : outre les élémens déjà indiqués, ils en ont introduit un qui dépend de la vapeur aqueuse répandue dans l'air : cette formule est la

suivante

$$X = 18334^{met.}(1 + 0{,}002837 \cos. 2\psi)\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(1 + \frac{2400}{a}\right)\left(1 + \frac{X}{a}\right)\left\{\log. \frac{h'}{h\left(1 + \frac{T'-T}{5412}\right)} + 2\log.\left(1 + \frac{X}{a}\right)\right\} (1)$$

(1) Pour des hauteurs moindres que 5000^{met}. MM. *Ramond* et *Biot* trouvent que la formule peut être réduite à celle-ci

$$X = 18393^{met.}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\log. \frac{h'}{h\left(1 + \frac{T'-T}{b}\right)}\right)$$

dans laquelle M. *Laplace* fait $b = 5550$, et M. *Biot*, $b = 5412$.

M. *Prony*, membre de l'Institut de France, a donné (*Connaissance des temps, pour* 1816) la formule suivante pour des hauteurs au-dessous de 1006 mètres,

$$X = K\theta q$$

où X désigne toujours la différence de niveau; $K = 15969$ (les facteurs de K étant 1.° 18336$^{met.}$; 2.° le double du module des logarithmes; 3.° la partie constante du terme dans lequel $\log. \left(\frac{h'}{N}\right)$ se trouve repété, en observant que, dans l'hypothèse actuelle, la partie variable peut être rejettée); la quantité N a pour valeur

$$N = h\,[1 + 0{,}000185\,(T' - T)]:$$

on a d'ailleurs

$$\theta = 1 + \frac{2(t'+t)}{1000},\; q = \frac{h'-N}{h'+N}$$

les quantités h et h' ont même acception que ci-dessus, et la quantité q est facteur du premier terme de la série suivante très-convergente sous l'hypothèse actuelle, savoir

$$\log. \left(\frac{h'}{N}\right) = 2Mq\,(1 + \tfrac{1}{3}q^2 + \tfrac{1}{5}q^4 + \tfrac{1}{7}q^6 + \text{etc.})$$

où M est le module 0,43429 etc. Pour des hauteurs de plus de 1000 mètres, M. *Prony* donne la formule suivante

$$X = [1 + (0{,}00266 + \tfrac{1}{4}q)\,q]\,k\theta q.$$

dans laquelle le coefficient constant 18334 qui diffère peu de celui de M. *De Laplace*, a été déterminé théoriquement par MM. *Biot* et *Arago*, d'après des expériences réitérées sur les densités de l'air et du mercure. M. *D'Aubuisson*, dans un mémoire inséré dans ceux des savans étrangers (Institut de France), s'exprime ainsi : la formule de MM. *Biot* et *Arago*, ne le cède à aucune autre en exactitude, si toutefois elle ne leur est pas supérieure.

Ces deux dernières formules sont aujourd'hui généralement adoptées, et parmi le grand nombre d'observations que je pourrais citer pour en prouver l'exactitude, il en est une surtout qui présente un grand intérêt. MM. *Ramond* et *Bouvard* voulurent déterminer la hauteur de Clermont au-dessus de la salle des baromètres de l'Observatoire de Paris : voici la moyenne de 722 observations.

	PARIS.		CLERMONT.		HAUTEURS déduites.
	BAR.	THER.	BAR.	THER.	
	Milli.	Deg.	Milli.	Deg.	Mètres.
1.re Année 356 j.	757,22	+14,3	727,80	+14,0	334,39
2.me Année 366 j.	758,07	+13,5	727,87	+13,1	341,95
Moyennes de 722.	757,65	+13,89	727,835	+13,54	338,23

Voici comme on vérifia l'exactitude du résultat.

La hauteur de la salle des baromètres au-dessus de l'océan, est de $78^m, 45$, et la hauteur du Puy-de-Dôme au-dessus de Clermont, de $1066^m,16$: en y ajoutant le résultat $338^m,23$, s'il est exact, on aura la hauteur absolue du Puy-de-Dôme au-dessus de la mer, ou $1482^m,84$: or, cette hauteur déduite du nivellement, a été trouvée $= 1481^m,23$. D'autres expériences encore prouveront l'excellence de cette méthode : ce sont celles faites aux environs de Clermont, par M. *Ramond*, dont les nivellemens sont dus à M. *De Cournon*, ingénieur-en-chef.

LIEUX.	Nombre d'observ.	MESURES BAROMÉTR.	Nivellement.	DIFFÉRENCES.
Prudelles. Somm. orient.	10	287m,78	287,02	+ 0m,76
— Ext. occident.	5	293, 76	294,30	— 0, 54
Hôtellerie de la Baraque.	8	280, 36	280,30	+ 0, 06
Hameau de Chez-Vasson.	1	420, 76	420,80	+ 0, 04
Le pont du Berger....	6	493, 30	493,75	— 0, 45
Le col de Goules.......	18	597, 93	597,24	+ 0, 09
	48			

Cet accord est tel qu'on le croirait dû au hazard, s'il ne se répétait chaque fois qu'on observe avec soin, avec de bons instrumens et dans des circonstances favorables : car il ne suffit pas d'observer à toute heure du jour et par un temps quelconque; l'observateur doit porter une attention sérieuse, 1.° aux instrumens, 2.° aux heures, 3.° aux situations, 4.° aux météores, 5.° aux variations accidentelles des baromètres.

1.° *Des instrumens.* Nous ne parlerons pas des conditions connues et requises. Nous dirons seulement que les thermomètres liés aux baromètres, doivent être abrités du soleil et de toute réverbération, et que les thermomètres libres à l'ombre du baton qui les porte, doivent être élevés à la plus grande distance de terre, à laquelle on puisse les observer commodément. Il est nécessaire d'observer d'abord le thermomètre du baromètre, avant le baromètre. Quant aux thermomètres libres, il est indifférent de les observer avant ou après le baromètre, pourvu qu'on saisisse le moment où l'atmosphère n'est troublée par aucune cause accidentelle.

2.° *Des heures.* Les meilleurs observateurs ont reconnu que les hauteurs conclues du baromètre, croissaient depuis le matin jusqu'à une heure, et qu'elles décroissaient depuis une heure jusqu'au soir, et que, hors du cercle de 11 heures à 3 heures, les colonnes

métalliques étant dans une agitation continuelle, on ne pouvait compter sur une grande exactitude dans les résultats; que les hauteurs les plus exactes étaient obtenues dans ces quatre heures de repos, et surtout vers midi qui donne les moyennes.

3.° *Des situations.* On conçoit l'effet des influences locales sur le baromètre : ainsi leur situation au haut des pics, sera préférable à celle des plaines, surtout si l'on observe aux pieds des montagnes; et, à plus forte raison, à leur placement au fond des vallées.

4.° *Des météores.* On doit rejetter les résultats obtenus sous l'influence des orages et des vents ascendans ou descendans. L'effet de ces météores est considérable : le premier surtout cause des erreurs qui vont quelquefois jusqu'au delà de 40 mètres en moins, quelque soit d'ailleurs l'éloignement de leur foyer. Les vents ascendans et descendans, en soulevant ou comprimant la colonne d'air, diminuent ou augmentent la colonne métallique.

5.° *Des vents horizontaux.* Les vents horizontaux partiels, ont encore une grande influence : car si, pendant une journée d'été, un vent glacial vient à traverser les régions inférieures, et frapper seulement le baromètre inférieur, on conçoit que ce baromètre montera davantage qu'il ne le devrait. Le contraire aurait lieu, si, pendant une journée froide, un vent du midi traversait les couches supérieures. L'erreur sera nulle, si le vent devient général (1).

Addition à la Notice.

Galilée, dit M. *Thénard* dans sa Chimie, 1.er vol. pag. 221, est le premier qui, en 1640, découvrit la pesanteur de l'air, et

---

(1) M. *Van Gorkum*, lieutenant-colonel, directeur des Reconnaissances militaires, vient de publier un ouvrage en langue nationale, ayant pour titre :

Instructie voor de Officieren der militaire Verkennings-Brigade, belast met het doen van waarnemingen met den barometer, ter bepaling der verschillende hoogtens van den bodem.

L'auteur ayant fait une étude approfondie de tout ce qui a été écrit sur la matière qu'il traite, l'analyse de son travail nous fournira l'occasion de faire partager à nos lecteurs, l'opinion favorable que quelques entretiens avec M. *Van Gorkum*, nous ont fait concevoir de l'ouvrage que nous annonçons.

nous voyons dans un ouvrage qui a pour titre, *Essai de Jean Rey, avec des notes de Gobet*, page 66, que même avant ce savant Italien, le poids de l'atmosphère avait été deviné par un Français. Il serait possible que notre pays pût réclamer l'honneur de cette importante découverte en faveur du célèbre *Stevin* de Bruges, Mathématicien de *Maurice de Nassau*, prince d'*Orange*, et qui le premier fit de la Statique une véritable science.

Car on lit ce qui suit au 6.me livre du 4.me vol. des *Œuvres Mathématiques de Simon Stévin*, publiées en français, après la mort de l'auteur, par *Albert Girard*, et imprimées à Leyden, en 1634, et qui a pour titre : *Adjonction à la Statique*.

Cette adjonction, dit-il, aura six parties, la première traitera, etc..., la sixième de l'Aérostatique, ou *Poids* de l'air.

Cette dernière partie de l'adjonction, n'a pas été traduite par *Girard* qui ne fait que l'indiquer ; elle ne peut se trouver que dans les bibliothèques de la *Hollande*. Il serait donc à désirer que mes condisciples de Leyden ou d'Utrecht, voulussent consulter cet ouvrage, et qu'ils examinassent les preuves que *Stévin* donne de la pesanteur de l'air. Si toutefois il ne fait qu'énoncer cette propriété, que nous ayons du moins la gloide de dire : le premier qui devina et publia la pesanteur de l'air, est *Simon Stévin*, Belge de nation (1).

B. Renard,

Candidat en sciences à l'Université de Gand.

---

(1) Mon collègue M. *Quetelet* qui veut bien se charger de la partie historique des travaux des Géomètres de ce royaume, et qui déjà nous a envoyé une notice très-étendue sur *Grégoire de St.-Vincent*, qui sera insérée dans le numéro suivant, ne manquera pas d'examiner les droits du célèbre *Stévin*, à la découverte de la pesanteur de l'air, et de fixer l'opinion sur ce point important de l'histoire de la physique.

J. G. G.

Exposition du système du monde, par M. le marquis De Laplace, *cinquième édition, revue et augmentée par l'auteur* (1).

L'Exposition du système du monde n'est plus un ouvrage qu'il s'agisse de faire connaître par une analyse. Traduit dans toutes les langues de l'Europe savante, et parvenu à la cinquième édit., il se trouve maintenant dans les mains de presque tous ceux qui peuvent le lire. L'auteur de la *Mécanique céleste* qui est le plus beau monument de notre âge, a voulu réduire en un seul volume tous les faits et toutes les théories qui composent le domaine de l'Astronomie, en omettant les calculs profonds et compliqués sur lesquels cette science est fondée. Il se met ici à la portée des lecteurs médiocrement instruits, et les initie aux plus hautes connaissances astronomiques : il leur épargne les difficultés et la sécheresse du calcul, les détails qui leur feraient perdre de vue l'ensemble et la généralité des faits. La pensée conduite par degrés et avec ordre vers les différentes parties du mécanisme de l'univers, s'accoutume à la grandeur des objets, saisit leurs rapports, distingue les divers mouvemens et prévoit les résultats. Après avoir lu cet ouvrage, on est surpris d'avoir acquis tant de connaissances en si peu de temps et avec si peu d'efforts. La seconde lecture encore plus agréable que la première, laisse appercevoir comment l'auteur a pu rendre la science aussi accessible : l'attention n'est plus absorbée par le sujet; on commence à remarquer la méthode, la distribution des matières, la rigueur et la clarté des raisonnemens,

(1) L'analyse que nous insérons ici littéralement, est de M. *Francœur*, auteur de l'*Uranographie* et de plusieurs ouvrages de mathématiques.

Lorsque nous aurons reçu cette cinquième édition, nous en rendrons compte à notre manière, sans cependant parler ni de la correction grammaticale ni des autres qualités du style, qui ne sont que très-secondaires, eu égard à l'importance et à la grandeur du sujet. J. G. G.

le tact de l'écrivain qui sait mettre chaque mot à sa place, s'arrêter à propos, ne rien omettre, et ne rien dire de trop. Cependant l'écrivain n'est pas encore jugé; on n'a vu que l'Astronomie et le savant qui l'enseigne; on peut enfin s'occuper du style, et c'est alors seulement que l'ouvrage entier est bien connu. On applaudit au choix de l'Académie française qui, en appellant dans son sein l'auteur *de l'Exposition du système du monde*, a déclaré qu'il n'avait pas moins honoré les lettres que les sciences. On pense bien que le mérite du style de M. *De Laplace*, ne consiste pas dans l'emploi des artifices oratoires : il doit tout à la raison, à la justesse des idées et à la propriété des termes. Quant à la correction grammaticale et aux autres qualités du style qui ne tiennent point au caractère de l'écrivain, et que le travail fait acquérir, elles sont aujourd'hui trop communes pour qu'on les remarque et qu'on en fasse mention.

Depuis la dernière édition de cet ouvrage, les sciences astronomiques ont fait des progrès : le nombre des planètes connues s'est accru; des données numériques ont été calculées avec plus de précision; les phénomènes dus à l'attraction moléculaire dictincte de la gravitation universelle, sont devenus si nombreux et d'une telle importance, que cette matière ne peut plus être traitée convenablement dans l'une des divisions d'un ouvrage en un seul volume. M. *De Laplace* a pensé qu'il fallait en faire un traité spécial qui, par sa connexion avec l'Exposition du sytème du monde, sera la suite, le second volume de cet ouvrage.

Dans le chapitre VI du dernier livre : *Considérations sur le système du monde et sur les progrès futurs de l'Astronomie*, l'auteur fait des reflexions sur les erreurs dont le génie même n'est pas exempt. Il a prouvé dans *la Mécanique céleste*, que les mouvemens des planètes et de leurs satellites, satisfont aux conditions de stabilité, qui assurent leur continuation dans tous les temps et fixent les limites de leurs variations. *Newton* à qui ce fait important n'avait pas été révelé, soit parce qu'il ne l'avait pas cherché, soit parce que l'analyse mathématique n'était pas encore assez avancée, pensait que l'action céleste des corps les uns sur les autres, augmenterait sans cesse l'inégalité des mouvemens, et que l'intervention du créateur, serait nécessaire pour remettre le système en

ordre (1). Les observations de M. *De Laplace*, sur cette opinion du plus grand Géomètre que l'histoire des sciences ait présenté jusqu'ici, le conduisent à l'examen de la doctrine des causes finales : il signale la funesse influence qu'exerce sur les esprits les plus judicieux, l'habitude d'expliquer les faits, en les rapportant à ces causes. « Parcourons, dit-il, l'histoire des progrès de l'esprit humain et de ses erreurs, nous y verrons les causes finales reculées constamment aux bornes de ses connaissances. » Ces causes que *Newton* transporte aux limites du système solaire, étaient, de son temps même, placés dans l'atmosphère pour expliquer les météores : elles ne sont donc que l'expression de notre ignorance (2). *Leibnitz*, dans sa querelle avec *Newton*, sur l'invention du calcul infinitésimal, critiqua vivement l'intervention de la divinité pour remettre en ordre le système solaire. *Newton* répliqua par une critique aussi vive de *l'Harmonie préétablie* de *Leibnitz*, qu'il qualifiait un *miracle perpetuel*. La postérité n'a point admis ces vaines hypothèses; mais elle a rendu la justice la plus entière aux travaux de ces deux grands génies. La découverte de la pesanteur universelle et les efforts de son auteur pour y rattacher les phénomènes célestes, seront toujours les objets de son admiration et de sa reconnaissance.

M. *De Laplace* termine son ouvrage par des notes dont plusieurs sont nouvelles; elles sont consacrées particulièrement à des questions d'Astronomie historique. La première est relative aux observations attribuées à *Tcheou-Kong*, dans les Annales chinoises :

---

(1) Cette opinion de *Newton* est d'autant plus extraordinaire, que cet homme d'un ordre supérieur, n'était pas moins religieux que grand Géomètre, qu'il a commenté l'Apocalipse, et que, par conséquent, il croyait à la fin du monde. L'idée d'une action nouvelle pour maintenir le système n'eût pas dû s'offrir à sa pensée.

(2) L'explication des phénomènes par les causes finales, n'est pas seulement l'expression de notre ignorance; c'est l'audace d'un esprit qui se croit capable de pénétrer jusqu'aux pensées de la divinité, qui ne cherche point à connaître ses ouvrages; mais qui prétend deviner dans quel but elle les a faits; comme si les desseins du créateur, étaient moins enveloppés de mystères que les loix de la nature.

l'auteur apprécie leur degré de certitude et démontre la réalité des faits cités par le *P. Gaubil.* La seconde a pour objet la durée des révolutions lunaires, suivant les *Chaldéens,* et celle de l'année sydérale de ce peuple. Dans la troisième, l'auteur détermine, d'après une observation attribuée à *Pytheas,* qu'elle devait être l'obliquité de l'écliptique, 350 ans avant notre Ere. L'accélération des mouvemens lunaires depuis *Hipparque* jusqu'à nos jours et les variations de l'écliptique, sont le sujet des trois notes suivantes. C'est ainsi que l'Astronomie ne se borne pas à donner la mesure du temps pour fixer l'ordre de nos occupations et l'emploi de notre courte existence; qu'elle sert aussi à retrouver des dates effacées par les causes qui changent tout à la surface de notre planète, sans affecter ses mouvemens dans l'espace; qu'elle supplée à la destruction des monumens historiques, et fait participer la chronologie à la lumière qui l'environne et au haut degré de certitude qu'elle tient de la connaissance des loix du mouvement des corps célestes. Cette belle application des calculs astronomiques, n'est pas nouvelle; mais elle a suivi les progrès de la science et ceux du calcul des probabilités, auquel M. *De Laplace* a fait faire de si grands pas.

Ces observations font appercevoir que notre illustre Géomètre manque à l'*Académie des Inscriptions;* on regrette qu'il n'ait pas encore été appellé à partager les travaux des trois Académies, comme le furent autrefois *Bailli et Fontenelle* (1). L'étude de la nature, considérée sous un point de vue un peu général, est inséparable de celle des antiquités, des traditions, des monumens qui

(1) Peut-être néanmoins serait-il a désirer que, pour conserver dans son entier le faisceau des connaissances humaines et pour respecter le principe de l'unité des sciences et de leur connexion intime avec la littérature et les arts, consacrés par la fondation de l'Institut, chacun des membres admis dans ce corps, fut censé appartenir à toutes les sections qui le composent, au lieu d'arriver successivement de l'une à l'autre, ce qui semble supposer une sorte de hiérarchie qui n'est point dans la nature des choses, et ce qui tend à rétablir l'ancienne division des Académies considérées comme formant des sociétés particulières et distinctes, tandis qu'elles doivent, au contraire, se confondre dans la grande famille scientifique et philosophique dont toutes les connaissances humaines font partie.

peuvent faire connaître les progrès des connaissances humaines, aux époques successives de l'existence des sociétés.

Après avoir exposé ce qui, dans le système du monde, doit être regardé non-seulement comme certain, mais comme donnant la mesure du plus haut degré de certitude auquel l'esprit humain puisse atteindre, M. *De Laplace* reproduit son ingénieuse hypothèse sur l'origine et le mode de formation des planètes. On sait qu'il regarde ces corps comme le résultat de la condensation de quelques parties de l'atmosphère solaire, ce qui expliquerait fort bien pourquoi leurs mouvemens sont dans le même sens, leurs orbites presque circulaires et peu inclinées les unes sur les autres, au lieu que les comètes se meuvent dans tous les sens et dans des orbites prodigieusement excentriques. Ces opinions semblent conformes aux observations d'*Herschell* sur les nébuleuses, et à tout ce que l'on sait jusqu'à présent sur l'astronomie physique. Cependant M. *De Laplace* ne les présente qu'avec la défiance que doit inspirer tout ce qui n'est point un résultat de l'observation ou du calcul. Cette réserve d'un savant du premier ordre, n'est pas imitée par quelques esprits moins circonspects qui ont tout vu, tout expliqué, sans observation ni calcul. Rien de plus facile que de lier par une théorie, des faits que l'on ne connaît qu'imparfaitement et que l'on expose comme on les sait. Le commencement de ce siècle a vu paraître plusieurs conceptions de cette espèce : l'*Exposition du système du monde* en est plus que la compensation (1).

A la fin de ce rapport de M. *Francœur*, on trouve cette note d'un des rédacteurs de la revue :

Nous croyons devoir insérer ici, dans l'intérêt des sciences et de la vérité, l'observation suivante qui nous est communiquée par un de nos collaborateurs, et qui n'atténue en rien les justes éloges donnés par M. *Francœur* au savant célèbre dont nous aimerons toujours à offrir le nom et les ouvrages à la reconnaissance et à l'admiration des amis des sciences.

---

(1) Cette phrase indique clairement M. *Azaïs*, auteur du Système *Stellaire* qui n'a rien de vrai, et du Traité *des Compensations* qui n'a rien de neuf.

J. G. G.

Le nombre des savans qui ont écrit avec un talent remarquable, est beaucoup plus grand qu'on ne le pense communément; mais, comme la plupart d'entre eux n'ont composé que des ouvrages de sciences, ils n'ont point acquis de réputation dans la littérature. *Descartes*, *Pascal*, *Fontenelle*, *D'Alembert*, etc., furent hommes de lettres, dans l'acception ordinaire de ce mot : les titres littéraires de M. *De Laplace* ne viennent que des sciences, et l'*Exposition du système du monde*, est le premier et le plus universellement reconnu. En considérant combien l'auteur a su rendre claires et accessibles des vérités abstraites, des théories compliquées, une science immense surchargée de divisions et de détails, on se demande s'il eût composé avec le même succès des ouvrages élémentaires. La question reste indécise; car celui-ci n'est point élémentaire, et l'expérience seule peut faire connaître quelles sont les qualités de l'esprit qu'exige la rédaction des livres destinés à ouvrir l'entrée des sciences. Dans la seconde édition de cet ouvrage, l'auteur était conduit à des réflexions morales et politiques qui ont été supprimées depuis, et que l'on doit regretter. Voici ce que l'on lisait autrefois à la fin du livre en question : « Le plus grand » bienfait des sciences astronomiques, est d'avoir dissipé les erreurs » nées de l'ignorance de nos vrais rapports de la nature, erreurs » d'autant plus funestes que l'ordre social doit reposer uniquement » sur ces rapports. *Vérité*, *Justice*, *Humanité*, voilà ses bases im» muables. Loin de nous la dangereuse maxime qu'il est utile de » tromper ou d'asservir les hommes pour mieux assurer leur bon» heur. De fatales expériences ont prouvé, dans tous les temps, que » ces lois sacrées ne sont jamais impunément enfreintes. »

Les vérités de l'an VII seraient-elles devenues fausses, ou craindrait-on aujourd'hui de les avouer? Craindrait-on de dire aujourd'hui qu'il ne faut point tromper et asservir les hommes? et si ces craintes sont fondées, ceux qui cèdent à leur influence, donnent un exemple affligeant pour ceux qui sont restés les amis de la *Vérité*, de la *Justice* et de l'*Humanité*.

Observations générales.

Je remercie celui de MM. nos Souscripteurs, qui a bien voulu m'adresser quelques observations sur le premier numéro de la Correspondance : il me prévient que le théorème, pag. 5, se trouve dans la Géometrie de M. *Van Swinden*, 2.e édit. pag. 165, et que ce que j'ai donné pag. 6 et 7, sous le titre : *Abréviation dans la solution*, etc., est déjà dans l'ouvrage intitulé : *Wiskundige mengelingen door Lobatto* (*Mélanges mathématiques, par* M. *Lobatto*), à la Haye et à Amsterdam, par les frères Van Cleef, 1823. Comme ces deux ouvrages sont écrits dans la langue nationale, je ne puis que regretter plus vivement encore de ne pas la connaître (1). Jamais on ne sera fondé à nous reprocher d'avoir été sciemment injustes à l'égard de qui que ce soit : nous savons trop qu'on n'a droit à quelque justice en sa faveur, qu'autant qu'on la pratique rigoureusement à l'égard des autres. On a ajouté que le second théorème, ou l'*Abréviation dans la solution d'un cas*, etc., est donnée dans la Géométrie de *Legendre*, onzième édit. pag. 422 : nous ouvrons cette édit. à la page indiquée, et nous voyons qu'il n'est question que de *la Résolution du* 3.e *cas des triangles sphériques, par la voie des séries*, tandis que l'abréviation en question ne se rapporte qu'à un cas de la trigonométrie plane. Ici nous n'aurions pu alléguer en notre faveur, ou plutôt à notre décharge, que la différence entre la composition d'un journal périodique formé d'articles variés, et celle d'un ouvrage sur un fonds homogène, qu'on peut méditer à loisir, corriger, améliorer et soigner enfin dans ses moindres détails, avant de le livrer à l'impression. En résumé, nous accueillerons avec reconnaissance toutes les observa-

---

(1) C'est encore par suite de cette ignorance de la langue, que j'ai reproduit la belle démonstration *du parallélogramme des forces* de M. *Lobatto*, consignée pour la seconde fois dans les mélanges cités, comme je viens de l'apprendre.

tions qui nous serons adressées, et nous en tiendrons compte. C'est ainsi, par exemple, que je réparerai une omission que le même savant a bien voulu me faire remarquer dans ma Notice sur les Caustiques (n.° I, pag. 29 et suiv.) : je devais dire que le célèbre *Huyghens*, dans son *Traité de la Lumière*, a donné la caustique du cercle et sa rectification : j'apprends aussi que M. *Lobatto* a traité ce sujet dans les mélanges cités.

J. G. G.

AVIS.

Dans l'intention de commencer à l'avenir le volume de la Correspondance avec l'année, projet qui, nous le croyons, ne peut contrarier MM. les Souscripteurs, nous devons compléter le 1.er volume de la Correspondance dans les huit mois, au plus, qui nous restent. Nous sommes donc obligés ou de faire les livraisons plus volumineuses, ou de les rapprocher, ou enfin de combiner ces deux moyens. Cependant, pour ne pas trop étendre ou multiplier les articles mathématiques qui peuvent ne pas intéresser autant plusieurs de nos lecteurs, nous préférerons rapprocher les livraisons.

Le célèbre *Ch. Huyghens* a légué à la Bibliothèque de Leyden, une riche collection de manuscrits qui peuvent jeter une vive lumière sur plusieurs points de l'Histoire des Mathématiques : car une partie de ces manuscrits contient sa correspondance avec les savans contemporains, à une époque où on jetait les fondemens de la philosophie naturelle, et où s'établissaient la Société royale de Londres, et l'Académie des sciences de Paris dont il fut l'un des ornemens. On regrette que, dans cette précieuse collection de lettres qu'il recevait de tous les savans, il n'ait pas conservé les copies de celles qu'il écrivait lui-même; mais, au moins, il ne

manque aucune des siennes dans sa correspondance avec *Leibnitz* et *L'Hôpital*. L'autre partie de ces manuscrits, se compose de quelques volumes écrits de la main de ce grand homme : on y trouve notés pêle mêle des observations astronomiques et physiques, des calculs tantôt achevés, tantôt interrompus et confusément entremêlés. Ce qui donne une importance historique à ces brouillons dans lesquels on trouve le germe et le jet de ses idées, c'est que les dates de ses inventions et de ses découvertes, y sont fixées avec précision, et qu'elles contiennent des démonstrations qui n'ont pas été publiées. La mort de M. *Van Swinden*, menaçait de faire tomber ce précieux dépôt dans l'oubli; mais M. *Uylenbroek*, lecteur à l'Université de Leyden, ayant été chargé par MM. les Curateurs de cette Université, de réunir en un corps d'ouvrage, les pièces et fragmens qui méritent d'être publiés, s'est déjà acquitté, en grande partie, de cette honorable commission, et il livrera son travail à l'impression, dès que le frais seront à peu près couverts par les souscriptions. M. *Uylenbroek* pense qu'il pourra réduire l'ouvrage, à deux volumes in-4.° au plus, et peut-être même à un seul.

(*Extrait du Messager des Sciences et des Arts, de Gand.*)

Nous prions M. *Uylenbroek* de vouloir bien compter les éditeurs de la Correspondance au nombre de ses souscripteurs et de ceux qui applaudissent le plus vivement à son entreprise.

Les Editeurs.

Académie royale des Sciences et Lettres de Bruxelles.

Prix décernés dans la séance du 7 mai, aux mémoires en réponse aux questions proposées par la Classe des Sciences.

Médailles d'or. 1.° à M. *Pagani*, docteur en sciences de l'Université de Liège, pour le mémoire sur la première question des sciences, touchant le mouvement du *fil flexible;*

2.° à M. *Cauchy*, ingénieur des mines et professeur de minéralogie et métallurgie à l'athénée royal de Namur, pour le mémoire sur la deuxième question, ayant pour objet la *constitution géologique de la province de Namur;*

3.° à M. *Alexandre Moreau de Jonnès*, officier supérieur d'état-major, correspondant de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, membre de plusieurs Sociétés savantes, résidant à Paris, pour le mémoire qu'il a envoyé au concours, sur la sixième question des sciences, relative au *déboisement.*

Médailles d'argent. 1.° à M. *Bosson*, pharmacien à Mantes-sur-Seine, qui a mérité l'*accessit* sur la même question 6.°;

2.° à M. *Glösener*, lecteur à la Faculté des sciences à Louvain, pour le mémoire sur la huitième question, concernant le *magnétisme terrestre.*

Questions proposées par la Classe des sciences, pour 1826.

1.re Quels sont les genres et les degrés de fermentation que subissent successivement les différentes espèces de fumier animal? Quels sont les procédés pour retarder ou accélérer ces fermentations? Par quels caractères peut-on les distinguer? Quelles sont les époques de fermentation où ces différentes espèces de fumier peuvent être employées avec le plus d'avantage comme engrais, eu égard à la nature des divers terrains ?

2.° Quelle est la théorie qui explique de la manière la plus satisfaisante les phénomènes divers que présente l'aiguille aimantée?

3.° Assigner la forme et toutes les circonstances du mouvement d'une bulle d'air qui s'élève dans un liquide dont la densité est supposée constante.

4.° Faire d'après les principes d'une saine chimie, une analyse comparée de nos grains indigènes et de ceux du nord, particulièrement du seigle et de l'orge, afin d'avoir des résultats exacts sur leurs propriétés alimentaires, ainsi que sur leur emploi dans les distilleries, amidonneries, brasseries etc., sous les rapports de la quantité et de la qualité de leurs produits.

5.° Décrire la constitution géologique de la province de *Limbourg*, les espèces minérales et les fossiles accidentels que les divers terrains renferment, avec indication des localités et la synonymie des auteurs qui en ont déjà traité.

6.° Quelle relation doit-il y avoir entre dix points de l'espace, pour que ces dix points appartiennent à une surface du second ordre, ou entre dix plans pour que ces dix plans soient toujours à une même surface de cet ordre?

7.° On demande 1.° d'examiner d'une manière approfondie, les différentes espèce de sociétés d'assurance sur la vie; 2.° d'établir, d'après des principes mathématiques, quelle est celle qui présente à la fois le plus d'avantages aux assurés et aux assureurs?

Pour 1827.

1.re Déterminer toutes les circonstances du mouvement infiniment petit d'un système quelconque linéaire, fléxible et élastique, autour de sa position d'équilibre, en ayant égard à la résistance d'un fluide élastique ambiant.

2.° Quelle est la raison physique qui donna à quelques-unes de nos prairies la qualité pernicieuse qui les fait désigner ordinairement sous le non de *prairies aigres*, en flamand *suerbemden*? Quels sont les moyens les plus simples, les plus économiques et les plus faciles pour corriger ce défaut et favoriser le développement des plantes qui fournissent une nourriture plus avantageuse.?

Problèmes à resoudre.

Mener une tangente à une courbe du second degré; 1.° par un point extérieur; 2.° par un point pris sur la courbe, en ne faisant usage que de la règle. Nous indiquerons la solution graphique qu'il s'agira de démontrer.

1.° (*fig.* 5) Soient menées par le point donné P extérieur à la courbe, les deux sécantes arbitraires PDA et PCB; soient prolongées les cordes AB et DC jusqu'à leur concours en E; soient joints les points A et C B, et D par des cordes qui se coupent en F; soit enfin, menée la droite EF qui rencontre la courbe en T et *t* qui seront les points de tangence, en sorte que PT et P*t* seront les deux tangentes cherchées.

2.° (*fig.* 6) Le point P est sur la courbe. Soient pris arbitrairement les trois points A, B et D : soit M le point de concours des cordes AB et DP; soit N le point de concours des cordes AD et BP. En faisant varier la position des points B et D, ou seulement du point B qu'on supposera en B′, on aura une nouvelle droite M′N′, dont l'intersection T avec MN, sera un second point de la tangente cherchée TP.

Cette construction donne lieu à plusieurs belles conséquences.

Mr Lobatto.

S C D M P' P C' C D M Q' Q C' C R B' M C Q D

G F L B M E D g c f b e d

Fig. 4

M c

Lith. a Soutel, Gand.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Sur la division de la ligne droite en parties égales.

Le procédé qu'on trouve dans les élémens de géométrie, a l'inconvénient d'exiger qu'on mène autant de parallèles qu'il doit y avoir de sous-divisions dans la droite sur laquelle on opère. M. *Du Chayla*, capitaine du génie en France, indique un tour d'adresse fort simple qui peut d'autant mieux trouver place dans les élémens, qu'il ne repose que sur des notions très-élémentaires. Peut-être cette construction se trouve-t-elle déjà dans quelques traités; quoiqu'il en soit, elle sera neuve pour plusieurs de nos lecteurs, comme elle l'est pour nous. Soit AB (*fig.* 7) la droite à diviser : soit menée à l'ordinaire par le point A, une droite sur laquelle soient portées de A en M, autant d'ouvertures de compas, égales et arbitraires, qu'on veut de divisions dans AB : par M et B, soit menée une droite MB prolongée, et du centre A avec le rayon AM, soit décrit un arc qui coupe le prolongement de MB en M′ : en portant les divisions de AM sur son égale AM′, et mènant des transversales par les points correspondans de division, ces droites

seront les parallèles du procédé ordinaire, et elles diviseront AB suivant la condition énoncée.

On a encore ramené la question de diviser une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales, à celle de la division en deux parties égales. Soit la droite AB à diviser en $2n+1$ parties égales : sur AB (*fig.* 8) on construira un triangle quelconque SAB; on prolongera AB au-delà de B d'une quantité BQ égale à n fois AB; par Q on menera une droite arbitraire rencontrant SA et SB en M et N; on tirera AN et BM qui se coupent en C : la droite SC divisera AB en un point P tel qu'on aura

$$PA : PB = n+1 : n.$$

Or, de ces deux nombres n et $n+1$, l'un est pair et l'autre impair comme $2n+1$: on reprendra la même construction sur ce dernier. La démonstration de ce procédé est fondée sur une propriété du *quadrilatère complet*, formé des quatre droites SA, SB, AN et BM : mais comme la démonstration sort du cercle des élémens, nous la supprimerons.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

M. *Sluys, lieutenant d'artillerie, à Bergen-op-Zoom,* nous écrit : « La démonstration de similitude, par laquelle vous commencez » votre premier numéro, est simple et élégante : mais n'a-t-elle » pas l'inconvénient d'exiger quelques notions de la trigonométrie, » tandis que ce cas de similitude doit prendre place dans les » premiers élémens de la Géométrie? » Nous nous empressons de consigner ici celle de M. notre abonné, qui nous paraît réduite à ses plus simples termes.

Théorème. *Deux triangles qui ont deux côtés respectivement proportionnels et l'angle opposé à l'un des ces côtés, égal de part et d'autre, sont semblables, si l'angle opposé à l'autre côté est de même espèce* (*fig*.9).

Conformément à l'énoncé, l'on a

$$(1)\ a : b = a' : b' ;\ A = A'$$

et B de même espèce que B' : si l'on peut démontrer que C=C', les triangles proposés seront équiangles et par conséquent semblables : or, C' ne peut être plus petit que C; car si cela était, on pourrait faire l'angle ACK=C'; alors les triangles ACK et A'C'B' devenant équiangles et conséquemment semblables, donneraient la proportion

$$KC : b = a' : b'$$

laquelle comparée à (1), donne KC = a. Le triangle BCK serait donc isocèle, et l'angle BKC' devant être égal à B, serait aigu ou obtus ainsi que B; mais l'angle AKC par la similitude obtenue des triangles AKC et A'B'C', devant aussi être égal à B', et par conséquent, d'après l'énoncé, de même espèce que B, il s'en suivrait que les angles BKC et AKC seraient tous deux aigus ou tous deux obtus, ce qui est impossible; donc l'angle C' ne peut être plus petit que C.

Un raisonnement analogue prouverait qu'on ne peut avoir C'>C. Donc l'angle C'=C.

THÉORÈME.

Une pyramide triangulaire formée de triangles équilatéraux, étant donnée, si on la suppose remplie de sphères très-petites ou de globules, on demande le rapport du plein au vide.

Nous placerons ici quelques notions préliminaires à la solution, notions qu'on pourrait d'ailleurs trouver (*Alg. d'Euler*, 1.er *vol. chap. V; des nombr. figurés ou polygones.*)

Si l'on suppose la suite des nombres naturels

1, 2, 3, 4, 5, 6 etc.,

et qu'on prenne la somme du premier, des deux, des trois, etc.,

premiers termes de cette suite, on aura ces nombres

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \text{etc.}\ldots\ldots \quad (1)$$

dits *triangulaires*, ou *trigonaux*, parce qu'on peut toujours disposer en triangles équilatéraux, autant de points qu'ils contiennent d'unités. Il est facile de reconnaître combien chaque côté a de points, et de s'assurer que, dans le second triangle, chaque côté contient 2 points; que, dans le troisième, chaque côtés en contient 3; que, dans le quatrième, chaque côté en contient 4, etc., en sorte que ces nombres de points, forment la suite naturelle des nombres. On peut concevoir que ces points deviennent les centres de sphères d'un même rayon et qui se touchent; ces sphères seront encore comptées par les nombres de la série (1). Si l'on note par $(ABC)^1$, $(ABC)^3$, $(ABC)^6$, etc., les triangles qui passent par les centres de ces sphères, et dont le premier est composé d'une sphère, le second de 3, le troisième de 6, etc., il est visible qu'on pourra les superposer, suivant l'ordre de décroissement,

$$\ldots\ldots (ABC)^6,\ (ABC)^3,\ (ABC)^1$$

c'est-à-dire, en pyramides régulières terminées par une sphère. Les nombres de sphères contenues dans ces pyramides, sont dits *nombres pyramidaux*, qui ne sont que les sommes du premier, des deux, des trois, etc., premiers nombres triangulaires formant la série (1), savoir

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dont il s'agit de trouver le *terme général* qui n'est autre chose que le terme sommatoire des n premiers termes de la série (1). Or, le terme général des nombres triangulaires, étant la somme des n premiers termes de la suite naturelle des nombres, a pour expression $\frac{n(n+1)}{2}$: ainsi les nombres pyramidaux seront les sommes des n termes

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)}{2}$$

et on trouve par les méthodes connues, qu'il a pour expression $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n+2}{3}$. Comme dans la question actuelle, le nombre des sphères qui deviennent des globules, est

infini, on pourra, dans la dernière formule, ne conserver que la plus haute puissance de n, hypothèse sous laquelle elle se réduit à $\frac{n^3}{6}$.

Cela posé, si l'on désigne par δ le diamètre d'un globule, δ étant très-petit, son volume aura pour expression $0{,}5236\ \delta^3$, δ^3 étant l'unité de volume. Ainsi le volume v de l'espace plein, qui n'est autre que le nombre des globules, aura pour valeur

$$v = \frac{0{,}5236\ \delta^3 n^3}{6} = \frac{0{,}2618\ \delta^3 n^3}{3}.$$

Cherchons le volume de la pyramide équilatérale. En désignant par a le côté de la base, on aura pour l'aire de cette base, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; mais comme a n'est autre chose que n, cette aire devient $\frac{n^2\sqrt{3}}{4}$. Imaginons une perpendiculaire abaissée du sommet du tétraèdre sur la base, dont le pied est le centre de gravité de la base : on trouve que cette hauteur $= n\sqrt{\frac{2}{3}}$ (*) : donc le volume V du tétraèdre sera

$$V = \frac{n^3}{6\sqrt{2}} \times \delta^3$$

conséquemment

$$\frac{v}{V} = 0{,}5236\sqrt{2} = 0{,}7405$$

Si l'on désigne l'espace vide par v', on aura nécessairement

$$\frac{v'}{V} = 0{,}2595$$

donc enfin

$$v : v' = 7405 : 2595 = 3 : 1,$$

(*) Si l'on désigne le sommet du tétraèdre par S, le pied de sa hauteur par O, l'un des sommets de la base par A, on a $\overline{SO}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AO}^2 = a^2 - \frac{4}{9}h^2$, h étant la hauteur du triangle équilatéral qui sert de base, et qui a pour valeur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; donc $\overline{SO}^2 = a^2 - \frac{4}{9}\times\frac{3a^2}{4} = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$; donc $SO = a\sqrt{\frac{2}{3}} = n\sqrt{\frac{2}{3}}$.

à peu près, rapport qui se rapproche beaucoup de celui de l'azote à l'oxigène dans l'air. Ainsi on pourrait supposer que les globules d'oxigène, très-petits par rapport à ceux de l'azote, remplissent les vides dans lesquels on pourrait encore supposer une très-petite quantité de *gaz acide carbonique* et de *gaz hydrogène*.

Les évaluations les plus exactes donnent pour un volume d'air atmosphérique, égal à l'unité, 0,785 d'azote, 0,207 d'oxigène, 0,007 d'acide carbonique, et au plus 0,003 de gaz hydrogène.

J. G. G.

ALGÈBRE.

Nouvelle solution du problème énoncé à la page 7 de la Correspondance Mathématique et Physique; Par J. N. Noel, professeur des Sciences Physiques et Mathématiques, Principal de l'Athénée de Luxembourg.(1).

Dans les pages 7 et suivantes du 1.er n.o de la Correspondance Mathématique et Physique, M. *J. G. G.* donne la solution d'un intéressant problême d'alliage. Cette solution dans laquelle on fait usage des séries récurrentes, n'est pas la plus simple qu'on puisse obtenir; et je pense qu'on pourrait lui préférer celle que j'ai donnée, d'après la notation des numéros des lettres, dans l'Algèbre élémentaire, pages 233 et suivantes.

---

(1) Dans un prochain cahier, nous ferons connaître les ouvrages élémentaires publiés par M. *Noël,* ainsi que plusieurs autres imprimés dans ce pays.

Voici du même problême, une autre solution fondée sur les progressions par quotients, et qui me paraît très-élémentaire :

Soient a' et b' les deux quantités connues d'eau qui entrent d'abord dans les deux mélanges a et b. Il est clair que les vases A et B contiendront toujours les mêmes quantités a et b de liquide, après chaque opération. Soit R la quantité d'eau contenue dans le vase A, avant la $v.^{me}$ opération; l'eau contenue dans le vase B avant la même opération, sera évidemment $a'+b'-\mathrm{R}$. Or, prendre c litrons sur a litrons, c'est prendre les $\frac{c}{a}$ de a litrons; c'est donc prendre les $\frac{c}{a}$ de l'eau, et les $\frac{c}{a}$ du vin qui composent le liquide a, puisque l'eau et le vin y sont exactement mêlés. Ainsi, après la $v.^{me}$ opération, on extrait du vase A, le nombre $\frac{c}{a}.\mathrm{R}$ litrons d'eau, et du vase B, le nombre $\frac{c}{b}(a'+b'-\mathrm{R})$ litrons d'eau. Donc, après cette opération, le vase A contient une quantité d'eau exprimée par

$$\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)\mathrm{R}+\frac{c}{b}(a'+b'), \text{ ou par } m\mathrm{R}+\mathrm{K},$$

en posant, pour abréger, $m=1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$ et $\mathrm{K}=\frac{c}{b}(a'+b')$.

L'expression $m\mathrm{R}+\mathrm{K}$ montre que *pour avoir l'eau contenue dans le vase* A, *après une opération quelconque, il faut multiplier par* m *l'eau qu'il renfermait avant* cette opération, *et ajouter* K *au produit.* D'après cette règle, puisque A contenait d'abord a' litrons d'eau, il en contiendra, après les opérations 1.re, 2.e, 3.e, 4.e, 5.e,..., respectivement

$$\begin{array}{l}
a'm+\mathrm{K}\\
a'm^2+\mathrm{K}m+\mathrm{K}\\
a'm^3+\mathrm{K}m^2+\mathrm{K}m+\mathrm{K}\\
a'm^4+\mathrm{K}m^3+\mathrm{K}m^2+\mathrm{K}m+\mathrm{K}\\
a'm^5+\mathrm{K}m^4+\mathrm{K}m^3+\mathrm{K}m^2+\mathrm{K}m+\mathrm{K}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Sans qu'il soit besoin de continuer ces résultats, on voit que la quantité x d'eau contenue dans le vase A, après la $n.^{me}$ opération, est

$$x = a'm^n + K + Km + Km^2 + Km^3 + Km^4 + \ldots + Km^{n-1};$$

d'où l'on tire

$$x = a'm^n + K\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Substituant les valeurs de m et de K, on aura, réductions faites,

$$x = \frac{a(a'+b')}{a+b} + \frac{a'b - ab'}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n.$$

Avec cette valeur de x, on aura aisément toutes les autres quantités inconnues du problême.

A la suite de cette solution très-simple et de tout point très-préférable à celle insérée dans le premier cahier, M. le professeur *Noël* nous adresse une généralisation de l'énoncé, qu'on trouvera à la fin du cahier, sous le titre : *Questions à résoudre.*

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Démonstration par les projections, de quelques propriétés de l'ellipse.

Concevons un cercle situé dans un plan quelconque, incliné sur le plan horizontal, et par le diamètre horizontal de ce cercle, faisons passer un plan horizontal sur lequel le cercle se projette par des verticales : tout diamètre de la courbe de projection, sera la projection d'un diamètre du cercle, et on démontre aisément que la courbe de projection, est une ellipse. En effet, si l'on désigne par a le rayon du cercle, par θ l'angle entre son plan et celui de la projection horizontale; si par le centre du cercle, on mène un rayon perpendiculaire à son diamètre horizontal, sa projection horizontale sera $a\cos.\theta = b$. Prenons l'origine des coordonnées au centre du cercle, le diamètre horizontal pour axe des x, et la projection horizontale b pour axe des y; ces deux axes seront à angles droits dans la courbe de projection. Or, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de cette dernière courbe, celles du point correspondant de la courbe projettée, ou du cercle,

seront x et $\frac{1}{\cos.\theta}y$. Mais, par la propriété du cercle, on a

$$x^2+\frac{1}{\cos.^2\theta}y^2=a^2, \text{ d'où } x^2\cos.^2\theta+y^2=a^2\cos.^2\theta$$

multipliant par a^2, il vient

$$a^2x^2\cos.^2\theta+a^2y^2=a^4\cos.^2\theta$$

remplaçant $a^2\cos.^2\theta$ par b^2, on obtient enfin cette équation connue de l'ellipse rapportée au centre et aux axes principaux,

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Si dans l'ellipse, on mène sous une direction quelconque tant de cordes parallèles qu'on voudra, les cordes du cercle dont elles sont les projections, seront aussi parallèles; celles-ci auront leurs milieux sur un même diamètre perpendiculaire à leur direction commune, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre, seront parallèles à ces cordes : les projections tant de ce diamètre que de ces tangentes, seront un diamètre et des tangentes à l'ellipse : ce diamètre de l'ellipse, passera donc par les milieux des cordes parallèles, et les tangentes à ses extrémités, seront parallèles à ces cordes : propriété d'où résulte, comme on sait, le moyen de déterminer le centre d'une ellipse, et par suite de retrouver la position de ses axes principaux. Parmi toutes les cordes parallèles qu'un même diamètre de l'ellipse partage également, il en est une qui passant par le centre, est elle-même un diamètre. Les diamètres du cercle dont ceux-là sont les projections, étant perpendiculaires entre eux, les tangentes aux extrémités de chacun d'eux, sont parallèles à l'autre, et dans la projection, ces tangentes aux extrémités des diamètres projections de ceux-là, sont pareillement parallèles à l'autre : ces diamètres sont dits *conjugués*, et ils sont en nombre infini.

Pour que deux diamètres conjugués de l'ellipse, soient égaux entre eux, il faut que les diamètres rectangulaires du cercle, dont ils sont les projections, soient également inclinés sur le plan de l'ellipse, ou sur la commune intersection du plan des deux courbes; condition satisfaite à l'égard des deux diagonales du carré circonscrit au cercle et formé des tangentes parallèles aux extrémités du

diamètre horizontal et du diamètre perpendiculaire. De là on conclut que les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, doivent être dirigés suivant les diagonales du carré circonscrit dont deux côtés opposés sont parallèles, et les deux autres perpendiculaires au grand axe de l'ellipse, propriété connue. Il serait facile de trouver l'expression analytique de ces demi-diamètres, et de prouver que, pour toutes les ellipses décrites sur le même grand axe $2a$, les extrémités des diamètres conjugués égaux, ont même abscisse, abstraction faite du signe.

Soit une suite de cercles situés dans des plans différens et se coupant tous suivant un même diamètre commun; si on les projette sur un même plan passant par ce diamètre qu'on peut supposer horizontal, leurs projections seront une suite d'ellipses ayant le même grand axe. Soit pris cet axe pour celui des abscisses; si, pour une abscisse quelconque, on mène les ordonnées correspondantes de tous les cercles, les projections de ces ordonnées, seront sur une même droite et elles deviendront des ordonnées aux ellipses pour la même abscisse : que par les extrémités des ordonnées aux cercles, pour l'abscisse déterminée, on mène des tangentes, ces tangentes iront toutes se terminer au même point du diamètre commun, puisque les normales correspondantes passent par le même centre : donc les projections de ces tangentes, qui sont des tangentes à l'ellipse, concourront aussi en ce point. Ces projections seront celles des arêtes du cône formé des tangentes aux points de contact des cercles, pour l'abscisse qu'on considère, cône dont le sommet est le point de concours des tangentes sur l'axe. D'où il suit encore que, pour une même abscisse, toutes ces ellipses décrites sur le même grand axe, ont même sous-tangente, propriété connue.

On démontre 1.° *que si à un cercle, on circonscrit un quadrilatère, l'intersection des deux droites qui joignent les points opposés de contact, coïncide avec l'intersection des deux diagonales :* 2.° *que si, dans un cercle, on inscrit un hexagone quelconque, et qu'on prolonge les côtés opposés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, ces points de rencontre, seront en ligne droite.* Au moyen des considérations que nous venons d'employer, on étendra facilement ces propriétés à l'ellipse. D'ailleurs dans l'un des numéros suivans, nous démontrerons ces propriétés et d'autres qui sont assez remarquables.

On sait que l'*aire de la projection de toute figure plane, sur un plan incliné au sien, est le produit de l'aire de la figure qu'on projette, par le cosinus de l'inclinaison des deux plans.*

1.° Soit circonscrit à l'ellipse un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués : ce parallélogramme sera, comme on l'a vu plus haut, la projection d'un carré inscrit au cercle dont l'ellipse est la projection. L'aire de ce carré étant $4a^2$, celle du parallélogramme sera $4a^2 \cos. \theta = 4ab = 2a \times 2b$, en observant que $a \cos. \theta = b$.

2.° L'aire du cercle étant πa^2, celle de l'ellipse sera

$$E = \pi a^2 \cos. \theta = \pi ab.$$

J. G. G.

De quelques usages des puissances des nombres naturels, dans la Géométrie et la Mécanique; par J. N. Noel, professeur des Sciences Physiques et Mathématiques, Principal de l'Athénée de Luxembourg.

1. Pour abréger, prenons $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots + n^m = S_m$, de manière que S_1 soit la somme des n premiers nombres entiers, S_2 la somme de leurs carrés, S_3 celle de leurs cubes, S_4 celle de leurs puissances quatrièmes, et ainsi de suite. Il s'agit d'abord de trouver une formule pour calculer S_m.

2. Or, si l'on fait $c_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}$, $c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ etc. il est clair qu'on aura, d'après la formule du binome, et m étant entier,

$$(1+v)^m = 1 + mv + c_2 v^2 + c_3 v^3 + c_4 v^4 + \ldots + mv^{m-1} + v^m.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant les n identités résultantes, et effaçant les termes communs aux deux

membres de la nouvelle équation, on obtiendra

$$(1+n)^m = n + 1 + mS_1 + c_2S_2 + c_3S_3 + c_4S_4 + \dots + mS_{m-1}.$$

D'après la manière dont on a trouvé cette formule, il est clair qu'on ne doit prendre, dans le second membre, que la somme de tous les termes qui précèdent celui dans lequel le numéro de S est égal à la valeur de l'exposant m.

Faisant donc successivement $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc., cette formule donnera

$$(1+n)^2 = 1 + n + 2S_1$$
$$(1+n)^3 = 1 + n + 3S_1 + 3S_2$$
$$(1+n)^4 = 1 + n + 4S_1 + 6S_2 + 4S_3$$
$$(1+n)^5 = 1 + n + 5S_1 + 10S_2 + 10S_3 + 5S_4$$
$$(1+n)^6 = 1 + n + 6S_1 + 15S_2 + 20S_3 + 15S_4 + 6S_5$$
$$(1+n)^7 = 1 + n + 7S_1 + 21S_2 + 35S_3 + 35S_4 + 21S_5 + 7S_6$$

etc...

3. De ces formules, il est facile de tirer les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, etc.; car en substituant chaque valeur dans toutes celles qui la suivent, et décomposant en facteurs, on trouve

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)$$
$$S_2 = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\, n^2 (n+1)^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{30} n\,(n+1)\,(2n+1)\,[3n\,(n+1) - 1]$$
$$S_5 = \tfrac{1}{12} n^2 (n+1)^2\,[2n\,(n+1) - 1]$$
$$S_6 = \tfrac{1}{42} n\,(n+1)\,(2n+1)\,\{3n\,[n^2 (n+1) - 1] + 1\}.$$

Effectuant les multiplications indiquées et réduisant, on obtient

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\, n^2 + \tfrac{1}{2}\, n$$
$$S_2 = \tfrac{1}{3}\, n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6}\, n$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\, n^4 + \tfrac{1}{2} n^3 + \tfrac{1}{4}\, n^2$$
$$S_4 = \tfrac{1}{5}\, n^5 + \tfrac{1}{2} n^4 + \tfrac{1}{3}\, n^3 - \tfrac{1}{30} n$$
$$S_5 = \tfrac{1}{6}\, n^6 + \tfrac{1}{2} n^5 + \tfrac{5}{12} n^4 - \tfrac{1}{12} n^2$$
$$S_6 = \tfrac{1}{7}\, n^7 + \tfrac{1}{2} n^6 + \tfrac{1}{2}\, n^5 - \tfrac{1}{6}\, n^3 + \tfrac{1}{42} n.$$

Observant que si une puissance de n, depuis la plus grande jusqu'à la plus petite, vient à manquer dans l'une des valeurs précédentes, cette puissance forme un terme ayant o pour coefficient, on verra, en examinant avec attention ces valeurs, que *pour trouver celle de* S_m, *il faut multiplier par* m *chaque terme de* S_{m-1} *et augmenter de* 1 *l'exposant de* n *dans chacun de ces termes, puis diviser le premier terme du résultat par* m + 1, *le* 2.e *par* m, *le* 3.e *par* m — 1, *le* 4.e *par* m — 2, *le* 5.e *par* $m-3$, *et ainsi de suite, jusqu'au dernier : faisant* n = 1 *dans l'expression résultante et retranchant de l'unité la valeur qui en proviendra, le reste sera le multiplicateur de* n *dans le dernier terme de* S_m, *et l'expression dont il s'agit, sera le surplus des termes.*

D'après cette règle, si l'on veut trouver S_7, la valeur de S_6 donnera d'abord

$$\tfrac{1}{8}n^8+\tfrac{1}{2}n^7+\tfrac{7}{12}n^6-\tfrac{7}{24}n^4+\tfrac{1}{12}n^2.$$

Posant ensuite $n=1$ dans ce résultat, ce qui fournit $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{7}{24}+\frac{1}{12}$ ou 1, puis retranchant cette valeur de l'unité, le reste o sera le multiplicateur de n dans le dernier terme de S_7; de sorte qu'on a

$$S_7=\tfrac{1}{8}n^8+\tfrac{1}{2}n^7+\tfrac{7}{12}n^6-\tfrac{7}{24}n^4+\tfrac{1}{12}n^2,$$

comme on le vérifierait d'ailleurs à l'aide des formules du n.° 2.

Avec cette valeur de S_7, la règle précédente donnera

$$S_8=\tfrac{1}{9}n^9+\tfrac{1}{2}n^8+\tfrac{2}{3}n^7-\tfrac{7}{15}n^5+\tfrac{2}{9}n^3-\tfrac{1}{30}n,$$

et ainsi de suite, pour S_9, S_{10}, S_{11}, etc.

4. Maintenant, comme toute expression de la forme $A+<B$ signifie A *plus une quantité plus petite que* B, il est facile de voir, par les valeurs du n.° précédent, qu'on a

$$S_1=\tfrac{1}{2}n^2+<n$$
$$S_2=\tfrac{1}{3}n^3+<n^2$$
$$S_3=\tfrac{1}{4}n^4+<n^3$$
$$S_4=\tfrac{1}{5}n^5+<n^4$$
$$S_5=\tfrac{1}{6}n^6+<n^5$$
$$S_6=\tfrac{1}{7}n^7+<n^6$$

etc.............

Donc, en général,

$$S_m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + < n^m ,$$

formule sur laquelle est appuyé le principe fondamental que voici.

5. *Soit* h = nu *une équation dans laquelle* h *est une quantité donnée, et* u *une variable qu'on peut supposer infiniment petite. Concevons que, dans une expression contenant des termes multipliés par des puissances entières de* u *et de* v, *on fasse successivement* v = 1, 2, 3, 4,..., n, *et qu'on ajoute les* n *expressions résultantes, pour avoir une grandeur constante* G; 1.° *tous les termes où l'exposant de* u *surpassera celui de* v *de plusieurs unités, disparaîtront du résultat, et devront d'abord être négligés;* 2.° *tous les termes de la forme* $au^{m+1}v^m$ *fourniront* $\frac{ah^{m+1}}{m+1}$.

D'après ce principe, l'expression $au^{m+1}v^m - bu^{p+2}v^p$, se réduit d'abord à $au^{m+1}v^m$, et devient finalement $\frac{ah^{m+1}}{m+1}$.

En effet, puisque dans l'expression proposée, on fait successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et qu'on ajoute les n résultats pour avoir la quantité invariable G, il s'ensuit que

$$G = au^{m+1} S_m - bu^{p+2} S_p.$$

Or,

$$S_m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + < n^m \text{ et } S_p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + < n^p;$$

substituant ces valeurs et réduisant d'après $h = nu$, il vient

$$G - \frac{ah^{m+1}}{m+1} = u\left(< ah^m - \frac{bh^{p+1}}{p+1} - < buh^p\right) \ldots (1)$$

Cette équation aura lieu quelque petite qu'on y prenne la variable u, car u peut y être supposée infiniment petite. Or, le multiplicateur de u, dans le second membre, est évidemment un nombre fini; donc ce second membre peut devenir aussi petit qu'on veut, tandis que le premier membre reste toujours le même, puisqu'il n'est composé que de quantités constantes. D'après cela, je dis que ce premier membre est nul; car s'il avait une valeur d différente de zéro, comme cette valeur est invariable, tandis que le second membre peut devenir aussi petit qu'on veut, on pourrait

toujours supposer ce second membre moindre que d : donc alors l'équation (1) serait impossible; ce qui ne saurait arriver, comme nous l'avons d'abord remarqué. Donc réellement le 1.er membre de l'équation (1) est nul, et il en résulte

$$G=\frac{ah^{m+1}}{m+1},$$

comme on l'a trouvé en appliquant le principe énoncé.

(*La suite au n.° prochain.*)

OBSERVATION

Sur les numéros 1, 2 *et* 3.

L'analyse exposée dans les numéros 1, 2 et 3 est simple et directe : cependant elle exige que, pour calculer chaque somme, on connaisse les sommes précédentes : la méthode suivante, due à *Thomas Simpson*, et que j'ai rapportée dans mon *Traité d'analyse algébrique*, pag. 473 et suiv., est exempte de cet inconvénient. On ne sera peut-être pas faché de la trouver ici exposée d'une manière très-succincte. On pose

$$S_m = a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots\ldots + [a+(n-1)\delta]^m$$
$$= An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \ldots\ldots + Pn \ldots\ldots (1)$$

A, B, C... P étant des coefficiens indéterminés et indépendans de n (*). Si l'on suppose la progression augmentée du terme $a+n\delta$, l'indice n deviendra $n+1$, et l'on aura

$$S_m = a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots\ldots + [a+(n-1)\delta]^m + (a+n\delta)^m$$
$$= A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + \ldots\ldots + P(n+1) \ldots\ldots (2)$$

(*) Nous avons légitimé, à priori, Ouvr. cité, la forme de ce développement quant aux puissances de n.

retranchant (1) et (2), il vient

$$(a+n\delta)^m=A[(n+1)^{m+1}-n^{m+1}]+B[(n+1)^m-n^m]+\ldots+P$$

Faisant les développemens indiqués, ordonnant de part et d'autre suivant n, égalant les coefficiens des mêmes puissances de n, et dégageant les coefficiens indéterminés, on obtiendra ces déterminations

$$A=\frac{\delta^m}{m+1}$$

$$B=a\delta^{m-1}-\frac{m+1}{2}A$$

$$C=\frac{m}{2}a^2\delta^{m-2}-\frac{m}{2}B-\frac{(m+1)m}{1.2.3}A$$

$$D=\frac{m(m-1)}{1.2.3}a^3\delta^{m-3}-\frac{m-1}{2}C-\frac{m(m-1)}{1.2.3}B-\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}A$$

etc.

qu'il faudra reporter dans le développement (1) de S_m. Pour avoir S_0, S_1, S_2, etc., on fera successivement $m=0, =1, =2$, etc. Enfin, pour en revenir aux formules de l'auteur, il faudra, en outre, dans S_0, S_1, S_2..., faire $a=\delta=1$ et $n=0, =1, =2, =3$, etc.

Ainsi le terme général d'une série, étant $an^p+bn^q+cn^r+$ etc., la somme des termes de cette série, sera $aS_p+bS_q+cS_r+$ etc. Par exemple, la suite des nombres pyramidaux

$$1,\ 4,\ 10,\ 20\ldots\ldots\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

a pour terme général

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\tfrac{1}{6}n^3+\tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{2}{6}n,$$

et on a pour la somme d'un nombre n de ces termes

$$\frac{S_3}{6}+\frac{3S_2}{2}+\frac{2S_1}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

J. G. G.

Sur le rayon de courbure des courbes à double courbure.

Le plan osculateur d'une courbe à double courbure, est celui de deux élémens consécutifs de la courbe considérée comme un polygone à côtés infiniment petits, mais dont trois côtés consécutifs ne peuvent se trouver dans un même plan. Ce plan osculateur contient le *rayon* et *le centre absolus de courbure*, c'est-à-dire, le centre et le rayon de l'arc infiniment petit qui se confond avec les deux élémens consécutifs et infiniments petits de la courbe, ou qui l'oscule dans sa concavité : ce rayon considéré par rapport à la surface développable formée des intersections des plans normaux aux élémens consécutifs de la courbe, est encore la plus courte distance de l'élément de courbure, à celui de la surface développable qui lui répond.

En désignant ce rayon par r, l'élément de courbure par ds, les coordonnées de cet élément par dx, dy et dz, *Monge* a donné cette expression très-simple et très-élégante de r, savoir

$$r^2 = \frac{ds^4}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}$$

à laquelle on peut parvenir par une marche beaucoup plus courte.

J. G. G.

Soient (*fig.* 10) mm' et $m'm''$ deux élémens consécutifs d'une courbe à double courbure, qu'on prolonge suivant $m't'$ et $m''t''$, qui seront deux tangentes consécutives : on sait que l'angle $t'm't''$ est ce qu'on nomme *l'angle de contingence*, lequel est infiniment petit. Soient menées les deux perpendiculaires $m'c$ à l'élément mm', et $m''c$ à l'élément consécutif $m'm''$; ces deux normales situées dans le plan osculateur $mm'm''$ se couperont au centre c de courbure absolue, qui aura pour rayon $m'c = r$: posant l'angle $m'cm'' = \omega$, on a

$$\sin.\omega = \omega = \frac{ds}{r}, \text{ d'où } r = \frac{ds}{\omega} \ldots\ldots\ldots (1)$$

où ds désigne l'élément $m'm''$. Soient a, b, c les cosinus des angles que forme la tangente $mm't'$ en m' avec les trois axes : il est clair que $a+da$, $b+db$, $c+dc$ seront ceux de la tangente $m'm''t'$ en m'', avec les trois mêmes axes. On aura pour le cosinus de l'angle $t'm't''$

$$\cos.\,\omega = a(a+da)+b(b+db)+c(c+dc)\ldots\ (2)$$

et d'ailleurs

$$(3)\ldots\ a^2+b^2+c^2=1;\ (a+da)^2+(b+db)^2+(c+dc)^2=1\ldots\ (4)$$

retranchant (3) de (4), il reste

$$-2(ada+bdb+cdc)=da^2+db^2+dc^2\ldots\ (5)$$

De l'expression (2), on tire

$$\sin.^2\omega = -2(ada+bdb+cdc)-(ada+bdb+cdc)^2$$

qui, en vertu de la relation (5) et en rejetant les infiniment petits du quatrième ordre, se réduit à

$$\sin.^2\omega = (da)^2+(db)^2+(dc)^2$$

Or, on sait que

$$a=\frac{dx}{ds},\ b=\frac{dy}{ds},\ c=\frac{dz}{ds}$$

donc

$$\sin.^2\omega=\omega^2=\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2$$

portant cette valeur dans (1), et prenant ds pour variable principale, on retombe sur l'expression de *Monge*.

(*Art. extrait.*) J. G. G.

MÉCANIQUE.

Sur les vitesses virtuelles finies et sur les autres principes généraux de la mécanique; par A. TIMMERMANS, Docteur en Sciences et Professeur de Mathématiques supérieures au Collège Royal de Gand.

On a déjà vu (Corresp. Math. et Phys.) que le principe des vitesses virtuelles avait été reconnu dans plusieurs machines simples, et étendu à des systèmes quelconques, avant qu'on en eût une démonstration générale; et ce qu'il y a de remarquable, c'est que, dans plusieurs des machines qu'on considéra d'abord, on pouvait à des espaces infiniment petits, substituer des espaces finis : mais lorsqu'on chercha à étendre cette loi à un système quelconque, on reconnut bientôt que cette extension du principe, n'était permise que dans un nombre limité de cas dépendans de la liaison des forces entre elles. C'est la recherche des conditions sous lesquelles le principe des vitesses virtuelles est susceptible de cette généralité, que nous avons ici pour objet : nous examinerons ensuite toutes les circonstances du mouvement d'un système qui les remplit : mais nous ferons précéder ces recherches d'une démonstration nouvelle du principe général, qui nous sera d'un grand secours pour la suite.

Soient x, y et z; X, Y et Z les coordonnées de deux points de l'espace, par lesquels on fait passer deux droites l et L; α, β et γ les angles entre l et les trois axes rectangulaires, a, b et c les angles entre L et les trois mêmes axes : si l'on représente par X, Y et Z; A, B et C les trois plus courtes distances entre les trois axes et les droites l et L, et par D la plus courte distance

entre les droites l et L, on aura ces formules

$$\left.\begin{array}{l} X=\dfrac{y\cos.\gamma-z\cos.\beta}{\sin.\alpha},\ Y=\dfrac{z\cos.\alpha-x\cos.\gamma}{\sin.\beta},\ Z=\dfrac{x\cos.\beta-y\cos.\alpha}{\sin.\gamma} \\ A=\dfrac{Y\cos.c-Z\cos.b}{\sin.a},\ B=\dfrac{Z\cos.a-X\cos.c}{\sin.b},\ C=\dfrac{X\cos.b-Y\cos.a}{\sin.c} \end{array}\right\}\ldots(1)$$

et en posant, pour abréger (V étant l'angle formé par les droites l et L,)

$$\sin.V=\sqrt{[(\cos.\beta\cos.c-\cos.b\cos.\gamma)^2+(\cos.\alpha\cos.c-\cos.a\cos.\gamma)^2+(\cos.\alpha\cos.b-\cos.a\cos.\beta)^2]}$$

on obtient

(*) $$(2)\ldots\quad D=\frac{X\sin.\alpha\cos.a+Y\sin.\beta\cos.b+Z\sin.\gamma\cos.c}{\sin.V}$$

$$-\frac{A\cos.\alpha\sin.a+B\cos.\beta\sin.b+C\cos.\gamma\sin.c}{\sin.V}$$

(*) Pour que le lecteur soit dispensé de toute recherche sur ce point, nous indiquerons en peu de mots la marche à suivre pour arriver à la formule (2) qui sert de base à la solution de la question. En partant des équations

$$x=mz+f \qquad X=m'Z+f'$$
$$y=nz+g \qquad Y=n'Z+g'$$

qui représentent les droites l et L, on trouve (Trait. d'App.) cette expression de la plus courte distance,

$$D=\frac{(f-f')\,[\cos.(l,z)\cos.(L,y)-\cos.(l,y)\cos.(L,z)]}{\sin.(l,L)}$$
$$\frac{-(g-g')\,[\cos.(l,z)\cos.(L,x)-\cos.(l,x)\cos.(L,z)]}{\sin.(l,L)}$$

Supposons que la droite L coïncide successivement avec les axes des x, y, z, auquel cas $f'=0$ et $g'=0$; on aura 1.° $\cos.(L,x)=1$, $\cos.(L,y)=0$, $\cos.(L,z)=0$, et, en posant $\cos.(l,x)=\alpha$, $\cos.(l,y)=\beta$, $\cos.(l,z)=\gamma$ la droite D deviendra

$$X=-\frac{g\cos.\gamma}{\sin.\alpha}$$

2.° $\cos.(L,y)=1$, $\cos.(L,x)=0$, $\cos.(L,z)=0$, et la droite D deviendra

$$Y=\frac{f\cos.\gamma}{\sin.\beta}$$

Supposons qu'une force P soit dirigée suivant l, et qu'on multiplie les deux membres de (2) par P sin. V, le facteur P sin. V indiquera la composante de P perpendiculairement à L, et le produit PD sin. V sera le moment de cette composante par rapport à l'axe L. Si l'on étend ce produit à tant d'autres forces P', P'', P''' etc. qu'on voudra, faisant des angles V', V'', V'''... avec le même axe L; si l'on désigne les plus courtes distances correspondantes

---

3.° cos. (L, z) = 1, cos. (L, y) = 0, cos. (L, x) = 0, et la droite D deviendra

$$Z = \frac{-f \cos. \beta + g \cos. \alpha}{\sin. \gamma}$$

mais d'après les équations ci-dessus, et en observant que

$$m = \frac{\cos. \alpha}{\cos. \gamma}, n = \frac{\cos. \beta}{\cos. \gamma}$$

on a ces valeurs de f et de g, savoir :

$$f = \frac{x \cos. \gamma - z \cos. \alpha}{\cos. \gamma}, g = \frac{y \cos. \gamma - z \cos. \beta}{\cos. \gamma}$$

ces substitutions faites dans X, Y et Z donnent

$$X = \frac{z \cos. \beta - y \cos. \gamma}{\sin. \alpha}, Y = \frac{x \cos. \gamma - z \cos. \alpha}{\sin. \beta}, Z = \frac{y \cos. \alpha - x \cos. \beta}{\sin. \gamma}.$$

En répétant les mêmes hypothèses sur la droite l, c'est-à-dire, en la faisant coïncider à son tour avec les trois axes, ce qui donne $f = 0$ et $g = 0$, et en posant cos. (L, x) = a, cos. (L, y) = b, cos. (L, z) = c, on obtiendra de la même manière

$$A = \frac{z \cos. b - y \cos. c}{\sin. a}, B = \frac{x \cos. c - z \cos a}{\sin. b}, C = \frac{y \cos. a - x \cos. b}{\sin. c}$$

Si dans la valeur générale D, on remplace sin. (l, L) par sin. V, f et g par leurs valeurs ci-dessus, et qu'on tienne compte des notations cos. (l, x) = α, cos. (l, y) = β etc., on retombera sur la formule (2).

J. G. G.

par D′, D″, D‴ etc., et qu'on somme ces produits, on aura

$$\mathrm{PD}\sin.\mathrm{V}+\mathrm{P'D'}\sin.\mathrm{V'}+\mathrm{P''D''}\sin.\mathrm{V''}+\text{etc.}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{PZ}\sin.\gamma+\mathrm{P'Z'}\sin.\gamma'+\mathrm{P''}\,\mathrm{Z''}\sin.\gamma''+\text{etc.})\cos.c\\+(\mathrm{PY}\sin.\beta+\mathrm{P'Y'}\sin.\beta'+\mathrm{P''}\,\mathrm{Y''}\sin.\beta''+\text{etc.})\cos.b\\+(\mathrm{PX}\sin.\alpha+\mathrm{P'X'}\sin.\alpha'+\mathrm{P''}\,\mathrm{X''}\sin.\alpha''+\text{etc.})\cos.a\\-(\mathrm{P}\cos.\gamma+\mathrm{P'}\cos.\gamma'+\mathrm{P''}\cos.\gamma''+\text{etc.})\,\mathrm{C}\sin.c\\-(\mathrm{P}\cos.\beta+\mathrm{P'}\cos.\beta'+\mathrm{P''}\cos.\beta''+\text{etc.})\,\mathrm{B}\sin.b\\-(\mathrm{P}\cos.\alpha+\mathrm{P'}\cos.\alpha'+\mathrm{P''}\cos.\alpha''+\text{etc.})\,\mathrm{A}\sin.a\end{array}\right\}\ldots(4)$$

Le premier membre S(PD sin.V), S indiquant la somme des produits de la forme PD sin.V, représente la force de rotation du système autour de l'axe L; dans le second membre, les facteurs entre parenthèses, égalés à zéro, repètent les six équations d'équilibre d'un système libre et invariable. Ainsi ces six équations ayant lieu, le système sera en équilibre autour d'un axe quelconque fixe dans l'espace; elles suffisent donc pour assurer l'équilibre : réciproquement, si S(PD sin.V) = o, c'est-à-dire, si le système ne peut tourner autour d'un axe situé d'une manière quelconque dans l'espace, ou, en d'autres termes, s'il est en équilibre, les six facteurs S(PZ sin.γ), S(PY sin.β), S(PX sin.α), S(P cos.γ), S(P cos.β), S(P cos.α) devront être nuls, puisque la position de l'axe L étant quelconque, les angles a, b, c sont indéterminés. S'il y avait un point fixe dans le système, qu'on le prît pour origine et qu'on fît passer l'axe fixe l par ce point, alors les trois plus courtes distances A, B et C seraient nulles, et il suffirait, pour l'équilibre, qu'on eut....... S(PZ sin.γ) = o, S(PY sin.β) = o, S(PX sin.α) = o. On trouverait également l'équation d'équilibre pour le cas où le système serait traversé par un axe fixe.

Supposons maintenant que le système de forme invariable soit dérangé d'une manière quelconque de sa position d'équilibre; il est évident que ce système se mettra en mouvement, et qu'il existera un axe traversant le système ou situé en dehors, autour duquel il tendra à tourner pendant le premier instant : désignons par $d\epsilon$ la vitesse angulaire autour de *cet axe instantané de rotation* : D$d\epsilon$ sera cette vitesse à la distance D de l'axe, c'est-à-dire, la vi-

tesse virtuelle absolue de P, vitesse que nous représenterons par dp ; P sin. V sera, comme on l'a vu plus haut, la composante de P dans le sens de cette vitesse virtuelle, composante que nous représenterons par Π; or, on a pour l'équilibre,

$$\Pi D + \Pi' D' + \Pi'' D'' + \text{etc.} = o,$$

multipliant par ds et introduisant l'abréviation dp, cette condition se transformera dans la suivante

$$\Pi\, dp + \Pi' dp' + \Pi'' dp'' + \text{etc.} = o \ldots\ldots \quad (5) \quad (*)$$

c'est-à-dire que la somme des produits de la vitesse virtuelle absolue de chaque force, par la force décomposée suivant cette vitesse, doit être égale à zéro, pour que l'équilibre ait lieu.

Un point du système pourra se mouvoir sur une surface, pourvu que l'axe de rotation passe par le centre de courbure du point de la surface, auquel la force est appliquée, et qu'il soit contenu dans le plan normal en ce point de la surface. Des forces pourraient être détruites : telles seraient celles dont les points d'application seraient sur l'axe de rotation.

(*La suite au n.° prochain.*)

(*) Cette loi d'équilibre diffère du principe des vitesses virtuelles; mais nous lui avons conservé cette forme qui se prête mieux aux applications que nous devons en faire. Pour revenir de la formule (5) à l'énonciation connue des vitesses virtuelles, on observera qu'en désignant par m, m', m''... les angles entre les directions des forces et celles des vitesses, on a les relations $\Pi = P \cos. m$, $\Pi' = P' \cos. m'$ etc., et qu'ainsi l'équation (5) devient

$$P \cos. m . dp + \Pi' \cos. m' . dp' + \text{etc.} = o$$

où $\cos. m . dp$, $\cos. m' . dp'$ etc. ne sont autre chose que les projections des vitesses virtuelles absolues suivant les directions mêmes des forces.

Questions résolues.

Solution par M. *Sluys*, lieutenant d'artillerie à Bergen-op-Zoom, de la question proposée (n.° I, pag. 32) et qui a pour énoncé : *Dans la parabole, la demi-somme des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités d'un arc quelconque, est toujours égal au rayon vecteur qui aboutit au sommet du diamètre mené par le milieu de la corde, parallèlement à l'axe, plus à la partie de ce diamètre, interceptée entre l'arc et la corde.*

Soient (*fig.* 11) $M'MM''$ l'arc de parabole; $M'M''$ la corde, n son milieu, MnX' une parallèle au grand axe AX, F le foyer, FM', FM et FM'' trois rayons vecteurs, RL la directrice. Il s'agit de prouver qu'on a

$$\tfrac{1}{2}(FM'+FM'')=FM+Mn\ldots\ldots\ldots (1)$$

Il résulte d'une propriété caractéristique de la directrice de la parabole, que si des points M', M et M'' on abaisse des perpendiculaires $M'm'$, Mm, $M''m''$ sur cette droite, on a $M'm'=M'F$ $Mm=MF$, $M''m''=M''F$: conséquemment

$$FM+Mn=Mm+Mn=nm\ldots\ldots\ldots (2)$$

Mais dans tout trapèze $M'm'm''M''$, un des côtés non parallèles, tel que $M'M''$, étant divisé en deux parties égales par la droite nm parallèle aux côtés $M'm'$ et $M''m''$, on sait que

$$nm=\tfrac{1}{2}(M'm'+M''m'')$$

Donc, en vertu de la relation (2),

$$FM+Mn=\tfrac{1}{2}(M'm'+M''m'')=\tfrac{1}{2}(FM'+FM'').$$

Cette démonstration très-simple, a de plus l'avantage d'être purement géométrique.

La suivante ne suppose que les propriétés élémentaires de la parabole. L'équation de cette courbe étant $y^2=2px$, si l'on pose $AP'=x'$, $AP''=x''$, $AP=x$, on a

$$FM'=x'+\tfrac{1}{2}p,\ FM''=x''+\tfrac{1}{2}p,\ FM=x+\tfrac{1}{2}p$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{FM'}+\mathrm{FM''})=\tfrac{1}{2}(x'+x''+p).$$

Or, le point n étant le milieu de la corde M′M″, on a l'abscisse

$$\mathrm{A}p=\frac{x'+x''}{2}=\mathrm{X}'$$

d'ailleurs

$$\mathrm{M}n=\mathrm{P}p=\mathrm{A}p-\mathrm{AP}=\mathrm{X}'-x$$

donc

$$\mathrm{FM}+\mathrm{M}n=\mathrm{X}'+\tfrac{1}{2}p=\tfrac{1}{2}(x'+\tfrac{1}{2}p)+\tfrac{1}{2}(x''+\tfrac{1}{2}p)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\mathrm{FM'}+\mathrm{FM''})$$

J. G. G.

Nous renverrons la solution des autres questions au prochain n.°

ASTRONOMIE.

Sur quelques constructions graphiques des orbites planétaires.

Parmi les élémens qui servent à déterminer la position des corps planétaires, deux concernent le plan de l'orbite, l'inclinaison et la ligne des nœuds; les autres font connaître la trajectoire qui s'y trouve contenue. Pour commencer par un des cas les plus simples, supposons que les deux premiers élémens soient connus, et qu'on ait à chercher les autres. Il suffira alors de deux observations pour les comètes et de trois pour les planètes. *Delambre* dans son grand Traité d'Astronomie (1), et *Biot*, dans les notes de son Astronomie

---

(1) Nous observerons qu'il faut lire, page 126, 2.e vol.

$p-ndz$ au lieu de ndz
$q-n'dz$ » $n'dz$
$r-n''dz$ » $n''dz$.

Physique, ont résolu le même problême par l'analyse : mais ces deux savans astronomes supposaient encore connu le moyen mouvement de l'astre; et d'ailleurs leur méthode qui n'est pas applicable aux comètes, exige que les observations soient également distantes.

Nous prendrons pour exemple la construction de l'orbite de la comète observée au mois de mai 1822 : la longitude du nœud était de 177° 26′ 56″, et l'inclinaison de l'orbite de 53° 37′ 24″, d'après les calculs faits à l'observatoire royal de Paris. De plus, on avait trouvé, par observation, pour le même astre

Mai.	Long. géoc.	Latit. géoc. B.
le 18 à 22^h 13′ 4″	87° 45′ 13″	12° 34′ 47″.
le 31 à 21 50 10	92 2 7	21 18 13

et l'on avait pour le soleil :

Long. ☉	Ray. vect. ☉
57° 19′ 34″	1,0122
69 47 21	1,0145.

Ces deux observations avec la longitude et le rayon vecteur du soleil, que font connaître les tables astronomiques, suffisent pour la solution du problême.

Prenons pour plan de projection horizontale, le plan même de l'écliptique, pour ligne de terre une droite LM perpendiculaire à S ☊, ligne des nœuds de la comète. Connaissant, par hypothèse, la longitude du nœud, nous pourrons construire l'angle ☊ S ♈ que forme ☊ S avec la ligne équinoxiale ♈ S ♎.

Nous connaissons aussi l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le plan de l'écliptique; l'une de ses traces étant ☊ S, l'autre dans le plan vertical sera Sh', en faisant l'angle LSh' égal à l'angle d'inclinaison de l'orbite.

Les tables du soleil nous donnent ensuite, pour chaque instant du jour, les longitudes du soleil et les distances de cet astre à la terre. Nous avons donc les données nécessaires pour déterminer les deux points T et T′ où se trouve la terre aux instans des deux observations données.

Si l'on se reporte maintenant aux époques où l'on a observé la comète, on doit avoir aperçu cet astre selon deux droites dont les projections horizontales TH et T'H' sont connues, ainsi que les projections verticales *th* et *t'h'*, puisque l'on connaît quelles étaient en ces points les longitudes et latitudes géocentriques de la comète. Ces deux rayons vecteurs vont rencontrer le plan de l'orbite en deux points dont les projections verticales *h* et *h'* sont déterminées par la rencontre des droites *th* et *t'h'* avec la trace du plan; et les projections horizontales seront en H et H', à la rencontre des droites *h*H, *h'*H' et TH, TH'. La connaissance de ces deux positions de la comète dans le plan de son orbite, va nous donner les moyens de construire la parabole qui en est la trajectoire.

Concevons d'abord le plan de l'orbite *h'*S ☊ rabattu sur le plan de l'écliptique, en le faisant tourner autour de la ligne des nœuds, les points (*h*,H) et (*h'*,H'), pendant ce mouvement, demeureront contenus dans des plans perpendiculaires au plan de l'écliptique, qui auront pour traces deux droites passant par les points H et H', et perpendiculaires à la ligne des nœuds. Quand le plan de l'orbite sera entièrement dans le plan de l'écliptique, les deux points où l'on a aperçu la comète, viendront se placer en C et C' à des distances égales aux droites S*h* et S*h'*. Il ne restera plus alors qu'à faire passer une parabole par les deux points C et C', de manière que son foyer soit en S, au centre du soleil. On pourra à cet effet employer la construction suivante : avec une ouverture de compas égale à la différence des rayons vecteurs SC, SC', on décrira la circonférence *in*, et la droite C'*i*, qui lui sera tangente, sera une perpendiculaire au grand axe SB de la parabole.

Pour se donner d'autres points de l'orbite, on fera les perpendiculaires cC_1 et $c'C'_2$, égales aux rayons vecteurs SC et SC'; et par les points *c* et *c'* on mènera la droite *c'c*B. Toutes les perpendiculaires telles que *c*C, seront alors égales aux rayons vecteurs correspondans SC : quant au sommet A de la parabole, il sera sur le milieu de la distance SB. En remettant en place le plan qui contient l'orbite de la comète, il tournera autour de la droite S ☊; les point A, C et C' auront pour projections horizontales dans le plan de l'écliptique *a*, H et H', et pour projections verticales *a'*, *h* et *h'*.

Pour construire l'orbite d'une planète, il faudrait trois observations. On commencerait par déterminer, comme nous l'avons fait précédemment, les trois points où les trois rayons visuels vont couper le plan de l'orbite : on ferait passer ensuite une ellipse par ces trois points. On pourra résoudre ce dernier problême par une construction semblable à celle que nous avons employée pour la parabole. Le second foyer de l'ellipse se trouverait au centre d'un cercle tangent à deux cercles décrits des extrémités des deux plus petits rayons vecteurs, avec des ouvertures de compas égales aux différences entre ces rayons et le plus grand rayon vecteur. Ce cercle serait de plus assujetti à passer par l'extrémité du plus grand rayon vecteur. Je me contente d'indiquer cette construction de l'ellipse, parce qu'on en trouverait facilement la démonstration, en observant que la somme de deux rayons vecteurs menés des foyers à tout point d'une ellipse, est une quantité constante.

Précédemment nous regardions comme connues la longitude du nœud et l'inclinaison de l'orbite; supposons que l'on ne connaisse rien que la longitude de la ligne des nœuds, et cherchons à déterminer par trois observations les élémens de l'orbite de la comète. Si nous n'employons que deux observations et si nous construisons comme précédemment; pour chaque inclinaison LSh' que nous pourrons donner au plan qui passe par la ligne des nœuds, nous aurons une nouvelle parabole, et les sommets de toutes les paraboles se trouveront sur une courbe; de sorte qu'en n'employant que deux observations, le problême resterait indéterminé, puisque nous saurions seulement que le sommet de la parabole cherchée est sur une courbe que l'on sait construire. Mais si l'on prend avec la troisième observation qui n'a pas encore été employée, une des précédentes, on pourra construire une seconde courbe qui contiendra aussi le sommet de la parabole cherchée ; le problême se réduit donc à chercher le point d'intersection des deux courbes qui sont les lieux des sommets de toutes nos paraboles.

La construction serait la même pour une planète; seulement il faudrait employer quatre observations et déterminer également le point d'intersection de deux courbes qui seraient les lieux des sommets des ellipses; ou bien encore on pourrait construire les deux courbes qui sont les lieux des seconds foyers.

Si l'inclinaison de l'orbite était connue au lieu de la ligne des nœuds, il faudrait encore employer des procédés à peu près semblables. En conservant au plan Sh' toujours la même inclinaison donnée, on ferait tourner la ligne d'intersection sur l'écliptique de manière à ce que ce plan fût toujours tangent à un cône droit dont le sommet est en S, et dont l'axe est vertical au plan de l'écliptique; à chacune de ses positions répondrait un nouveau sommet de parabole, quand on n'emploierait que deux observations. Le sommet de la parabole cherchée dépendrait donc encore de l'intersection de deux lignes qu'on peut construire.

La détermination de l'orbite d'une planète, rentrerait dans la même construction.

Passons maintenant à l'hypothèse où aucun des élémens d'une orbite planétaire ne serait connu. Il faudrait employer alors au moins trois observations pour une comète, et quatre pour une planète. La marche que l'on suivrait serait à peu près semblable à celle qu'on suit par l'analyse : c'est-à-dire, qu'on ferait une première hypothèse sur la longitude de la ligne des nœuds, et l'on construirait, comme nous l'avons fait précédemment, les deux lignes qui sont les lieux des sommets de toutes les paraboles ou ellipses. Si ces deux courbes n'avaient pas de point commun, il faudrait faire une nouvelle hypothèse sur la position de la ligne des nœuds, ou plutôt on prendrait pour angle d'inclinaison de l'orbite, celui pour lequel les deux courbes se rapprochaient le plus. Alors regardant comme connue l'inclinaison de l'orbite, on chercherait la position des nœuds, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. Après quelques essais semblables, on ne tarderait pas à trouver la véritable position du sommet de la parabole et conséquemment tous les autres élémens de l'orbite. On pourrait, pour plus d'assurance, prendre les trois droites deux à deux, et construire à la fois trois lignes qui devraient contenir le sommet de la parabole demandée. On conçoit qu'une pareille méthode ne peut jamais comporter le même degré d'approximation que l'analyse; elle a cependant cet avantage qu'elle est expéditive et qu'elle peut donner d'abord une idée bien suffisante de la position d'une orbite. Un peu d'habitude de la géométrie descriptive en fera sentir la commodité : elle n'exige d'ailleurs pas de connais-

sances bien étendues dans les mathématiques, comme les méthodes qu'enseigne l'analyse (1).

A. Q.

Nous donnerons ici, pour ceux de nos lecteurs qui s'occupent de pareilles recherches, l'extrait d'une lettre, contenant les observations de la comète découverte en décembre 1823, faites à Paris, par MM. *Bouvard* et *Nicollet*.

T. M.		Asc. dr. de la com.	Déc. de la comète.
31 Déc. 1823,	à 6h 50′ 42″	252° 54′ 22″	12° 36′ 47″ B
2 Janv. 1824,	» 5 54 38	252 1 55	15 16 32
5 »	» 5 24 51	250 30 24	19 46 12
6 »	» 6 0 15	249 55 55	21 27 31
24 »	» 22 46 11	215 23 24	66 2 27
27 Janv.	à 4 56 21	199 29 7	70 38 48
30 »	» 2 51 8	171 4 41	73 17 41
1 Févr.	» 1 28 32	152 20 19	72 37 43
2 »	» 0 51 24	144 1 15	71 41 10
3 »	» 0 19 50	137 5 32	70 33 [illegible]5
3 »	» 23 52 39	131 15 47	69 12 13
6 »	» 22 52 12	119 4 6	64 43 9
8 »	» 22 23 20	113 47 59	61 44 23 B

« Les huit dernières observations ont été faites au grand cercle mural de *Fortin;* elles sont excellentes. Les premières avec une

---

(1) On trouvera dans le 3.e vol. des Mém. de l'Acad., de Brux. d'où ces détails sont extraits, l'examen des lignes qui sont les lieux des sommets des paraboles et d'autres détails qui s'y rapportent.

lunette non parallactique, l'instrument de *Gambey* n'étant pas encore placé. Elles sont moins sûres que les dernières. Les temps moyens sont comptés de minuit. »

« Voici deux observations faites à Marseille, par M. *Gambart*. Ce jeune astronome en a fait un bien plus grand nombre, mais elles ne sont pas réduites. »

12 Janv. 1824, à $5^h\ 58'\ 26''$	$245^\circ\ 38'\ 2''$	$33^\circ\ 0'\ 11''$
14 » 5 7 24	243 39 1	37 31 12

« Si l'on veut calculer l'orbite, on doit employer les observations du 31 décembre, 6 et 14 janvier, pour déterminer le passage et la distance périhélie. Ensuite pour corriger les élémens, celles du 31 décembre, 27 janvier, et celle du 8 février. Les calculs ont donné les élémens paraboliques suivans, à très-peu près.

Passage.... 9 déc. $20^h\ 30'$ temps moy. à Paris, compté de minuit.
Distance... 0,230;8.
Périhélie... $273^\circ\ 56'\ 12''$.
Nœud..... 302 59 14.
Inclinaison 76 2 45.
Mouvement rétrograde.

L'instrument de *Gambey*, dont parle M. *Bouvard*, est une superbe lunette parallactique, marchant d'elle-même, au moyen d'un mécanisme nouveau, par un mouvement continu. Elle a été exposée au Louvre en 1823, avec d'autres instrumens ingénieux du même artiste.

En employant les observations précédentes pour les constructions que nous avons indiquées, il faudra avoir soin de réduire par les formules connues, les ascensions droites et déclinaisons en longitudes et latitudes géocentriques.

A. Q.

Extrait d'une lettre de M. Bouvard, *de l'Institut de France, à M.* A. Quetelet.

Comme cette lettre est relative au mémoire d'Astronomie présenté à l'Académie royale de Bruxelles, dont j'ai donné un résumé, 1.er cahier de la Correspondance, pag. 12, et qu'elle contient une correction d'une formule qui s'y trouve, et comme d'ailleurs M. *Bouvard* déclare être parvenu depuis long-temps de son côté à un résultat à peu près semblable (1), je me fais un devoir d'en extraire les passages qui peuvent intéresser nos lecteurs : en accordant à ce savant la priorité de ces recherches ; et en renonçant à toute espèce de prétention sur la formule dont il s'agit, je saisis cette nouvelle occasion pour le remercier des conseils pleins de bonté qu'il m'a donnés à l'observatoire royal de Paris, en me servant de guide et d'ami dans l'art si difficile de l'observation.

..... En examinant vos résultats des calculs numériques, j'ai été surpris de trouver l'erreur du mouvement diurne du soleil, trop faible de $-6'',01$, tandis que, par mes calculs, j'ai trouvé pour cette erreur $+ 0'',09$ seulement. J'ai revu tous mes calculs et j'ai trouvé le même résultat parfaitement juste. Alors j'ai calculé vos formules et j'ai trouvé la cause de votre erreur. La forme que vous avez donnée aux quantités m'', m' et m est préférable, le calcul est plus simple et plus commode, qu'en faisant usage des premières valeurs ; mais vous vous êtes trompé de signe dans les transformations : la valeur de m'' est la suivante

$$m'' = 2 \sin. \tfrac{1}{2}p . \sin. \tfrac{1}{2}p' . \sin. \tfrac{1}{2}(p' - p)$$

et pour m' et m, on trouve

$$m' = 2 \sin. \tfrac{1}{2}p . \sin. \tfrac{1}{2}p'' . \sin. \tfrac{1}{2}(p - p'')$$
$$m = 2 \sin. \tfrac{1}{2}p' . \sin. \tfrac{1}{2}p'' . \sin. \tfrac{1}{2}(p'' - p')$$

---

(1) Cette méthode que M. *Bouvard* possède depuis 1803, se trouve consignée dans un ouvrage d'Astronomie, resté manuscrit.

Les valeurs de m'' et m doivent toujours être positives, parce que $(p'-p)$ et $(p''-p)$ sont positifs; mais il est évident que celle de m' doit en tout cas être négative, parce que $(p-p'')$ est négatif. Cette erreur est la cause du résultat fautif auquel vous êtes arrivé.

..... En terminant vos calculs d'après vos formules, vous obtiendrez la même valeur de n, qui est la suivante

	$n = 3548'',42$	
d'après les tables	3548, 33	
	+ 0, 09	différence.

La lettre de M. *Bouvard* contient différentes autres observations intéressantes qui se rapportent à des détails du mémoire que nous n'avons point fait connaître au lecteur, et qui par là ne peuvent trouver place ici. Nous avons vu aussi avec reconnaissance que cet habile Astronome à qui l'on doit tant de travaux utiles, ne sentait pas moins vivement que nous le bienfait dont serait pour nos provinces, l'érection d'un observatoire, et qu'il serait un des premiers à venir célébrer avec nous un aussi heureux événement.

Nous finirons en citant le passage de la lettre où il est question de la nouvelle comète qu'on vient de découvrir.

« M. *Gambart*, à Marseille, a découvert une nouvelle comète, le 19 Mai, à 3^h du matin. Sur ses observations des 20, 21, 22 et 23, il a calculé l'orbite parabolique. Les observations ont pu changer les premiers élémens qui ressemblent beaucoup à ceux de la 3.e comète de 1790. Ce jeune astronome se propose de vérifier si ces deux astres sont identiques. Voici ces derniers élémens :

Passage au périhélie, mai 31, j. 143, tems moy. à Marseille, de minuit.

Distance périhélie..... 0,8933.

Périhélie............. 273°, 45'.

Nœud............... 18, 56.

Inclinaison........... 56, 59.

Mouvement rétrograde. »

A. Q.

Énoncés de quelques théorèmes nouveaux sur les Caustiques.

Nous avons donné dans le premier cahier de la Correspondance, pag. 14 et 15, un théorème général sur les caustiques planes, et l'énoncé modifié qu'en a donné M. *Gergonne;* d'après tout ce que cet habile géomètre a dit sur l'utilité dont pouvait être ce théorème dans l'optique (voyez les Ann. de Math. Mai 1825), nous nous dispenserons d'entrer dans d'autres détails. Depuis, M. *Gergonne* nous ayant invité par une lettre particulière à rechercher comment le théorème se trouverait modifié en considérant des surfaces au lieu de lignes, nous sommes parvenus à des résultats plus généraux encore, que nous allons indiquer.

Théorème I. La surface caustique secondaire (1) par réflexion, pour une surface réfléchissante quelconque et pour des rayons incidens normaux à une autre surface aussi quelconque, est l'enveloppe de toutes les sphères qui ayant leurs centres sur la surface réfléchissante, sont tangentes à la surface à laquelle les rayons incidens sont normaux.

Théorème II. La surface caustique secondaire par réfraction pour une surface quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidens normaux à une autre surface aussi quelconque, est l'enveloppe de toutes les sphères qui ont leurs centres sur la surface séparatrice, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la surface à laquelle tous les rayons incidens sont normaux, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Voici maintenant deux théorèmes qui, au fond, reviennent à un seul, pour les lignes à double courbure. Il faudra d'abord observer que si on ne déterminait pas dans quel sens doit se faire

---

(1) Nous nommons caustique *secondaire*, la développante de la caustique ordinaire; nous employons une expression analogue pour les surfaces.

la réflexion ou la réfraction par la direction des normales à la courbe réfléchissante ou dirimante, on pourrait considérer la courbe comme réfléchissant et réfractant les rayons dans tous les sens de la même manière qu'une surface; mais si chacun des élémens de la courbe à double courbure, doit être regardé comme un petit élément plan ne réfléchissant ou ne réfractant que dans un sens indiqué par sa normale, on aura les théorèmes suivans.

Théorème I. La caustique par réflexion pour une courbe à double courbure réfléchissante quelconque, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe quelconque, est la développée de la ligne d'intersection de deux surfaces. La première surface est l'enveloppe de toutes les sphères qui ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, sont tangentes à la courbe à laquelle les rayons incidens sont normaux. La seconde est formée en menant par les différens points de la courbe normale aux rayons incidens, une série de parallèles aux normales de la courbe à double courbure réfléchissante.

Théorème II. La Caustique par réfraction pour une courbe à double courbure quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe quelconque, est la développée de la ligne d'intersection de deux surfaces. La première surface est l'enveloppe de toutes les sphères qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la courbe normale aux rayons incidens, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence. La seconde est formée en menant une série de parallèles aux normales de la courbe séparatrice, par des points pris sur les rayons incidens de telle manière que les distances de ces points aux points d'incidence, soient aux rayons des sphères respectives, aussi dans le rapport de réfraction.

Quand la courbe réfléchissante ou séparatrice devient plane, ainsi que la ligne à laquelle les rayons incidens sont normaux, la seconde surface devient un plan, et l'on passe au cas particulier dont il a été question. (Cah. 1.er de la Corr.)

On remarquera que la seconde surface qui est une surface réglée, ne coupera la surface enveloppe des sphères que selon deux courbes; dans le cas de la réflexion, l'une de ces courbes est la

ligne normale aux rayons incidens, et l'autre est la caustique secondaire : dans le cas de la réfraction, l'une des courbes est caustique secondaire pour les rayons réfractés, et l'autre pour les rayons réfléchis et réfractés.

Ces théorèmes qui rentrent parfaitement dans la théorie des ondulations, comme l'observation en a été faite pour ceux que j'ai donnés, par M. *Sarrus*, offrent un si grand nombre d'applications utiles, que, dans bien des cas, il suffit de se donner le problême pour en prévoir la solution.

A. Q.

Extrait d'une lettre de M. GERGONNE, *éditeur des Annales Mathématiques de Nîmes, et membre de plusieurs Académies, à M.* A. QUETELET.

« Si des rayons de lumière, distribués dans l'espace de telle » sorte qu'ils puissent être traversés orthogonalement par une » même surface, rencontrent une surface réfléchissante quelconque; » en décrivant des différents points de celle-ci, pris successivement » pour centre, des sphères tangentes à la première, l'enveloppe » de ces sphères traversera orthogonalement les rayons réfléchis.

« Si la surface au lieu d'être réfléchissante, sépare deux milieux » homogènes de nature différente, il faudra que les rayons des » sphères, soient aux distances de leurs centres à la surface tra» jectoire orthogonale des rayons incidens, dans le rapport constant » du sinus de réfraction au sinus d'incidence; et alors l'enveloppe » de ces sphères sera une des surfaces trajectoires orthogonales » des rayons réfractés. » (1)

---

(1) Ces deux théorèmes, semblables aux deux premiers énoncées plus haut, ne nous sont parvenus que lorsque l'article précédent se trouvait entièrement composé.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Sur la chaleur rayonnante.

M. *Leslie* a démontré par des expériences très-ingénieuses que les rayons calorifiques partis d'un même point, pris sur la surface d'un corps échauffé, n'ont pas la même intensité dans tous les sens. L'intensité de chaque rayon, comme celle de toutes les émanations, décroît en raison inverse du carré des distances au point de départ : à distance égale, elle est plus grande dans la direction normale à la surface; et, suivant M. *Leslie*, elle est proportionnelle pour tout autre rayon, au cosinus de l'angle compris entre sa direction et cette normale. Cette loi conduit à une conséquence utile dans la théorie de la chaleur rayonnante : il en résulte que si on a un vase de forme quelconque, fermé de toutes parts, dont les parois intérieures soient partout à la même température, et émettent par tous leurs points des quantités égales de chaleur, la somme des rayons calorifiques qui viendront se croiser en un même point du vase, sera toujours la même, quelque part que ce point soit placé. De sorte qu'un thermomètre qu'on ferait mouvoir dans l'intérieur du vase, recevrait constamment la même quantité de chaleur, et marquerait partout la même température, ce qu'on peut regarder comme étant conforme à l'expérience. Cette égalité de température dans toute l'étendue du vase, ne dépendant ni de sa forme, ni de ses dimensions, doit tenir à la loi même du rayonnement.

Dans un mémoire lu à la Société Phylomatique, M. *Poisson* a démontré cette formule

$$\frac{a\omega \cos. \alpha}{r^2} = \frac{a\omega'}{r^2} = a\theta \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle α désigne l'angle compris entre la normale en un point quelconque M de la surface intérieure du vase, et la droite MO menée de ce point à un point quelconque O fixe, pris dans l'intérieur du vase; a l'intensité du rayon normal, r la longueur de la droite MO, enfin ω une portion infiniment petite de la surface du vase, prise autour du point M; si l'on conçoit un cône qui ait pour base l'élément ω et son sommet en O, qu'on décrive de ce point O, comme centre et du rayon OM une surface sphérique, $\omega' = \omega \cos. \alpha$ sera la portion infiniment petite de cette surface, interceptée par le cône : les deux surfaces ω et ω' peuvent être regardées comme planes; la seconde est la projection de la première, et leur inclinaison mutuelle est égale à l'angle α, compris entre deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires. Qu'on conçoive une autre surface sphérique, décrite du même point O, comme centre, et d'un rayon égal à l'unité et qu'on représente par θ l'élément de cette surface, intercepté par le cône qui répond aux élémens ω et ω'; on aura $\omega' = r^2\theta$, ce qui explique l'équation (1). Si on fait la somme de toutes les quantités telles que $\frac{a\omega \cos. \alpha}{r^2}$, on aura la quantité totale de chaleur reçue par le point O; laquelle sera égale à la somme des produits $a\theta$, étendue à toute la surface du vase, ou égale au facteur constant a multiplié par la somme des élémens θ : or, si l'on désigne par π le rapport de la circonférence au diamètre, et qu'on observe que 4π est l'aire de la sphère, nous aurons $4\pi a$ pour la valeur de tous les $a\theta$, c'est-à-dire, pour la quantité de chaleur qui arrive au point O, et l'on voit que cette quantité est indépendante de la position du point O, ce qu'il s'agissait de prouver. On peut aussi remarquer qu'elle ne dépend ni de la forme, ni des dimensions du vase : d'où il résulte que si le vase est vide d'air, et qu'on vienne à augmenter ou à diminuer sa capacité, la température marquée par un thermomètre intérieur, demeurera toujours la même, et c'est, en effet, ce que M. *Gay-Lussac* a vérifié par des expériences susceptibles de la plus grande précision. Ces expériences détruisent l'opinion d'un calorique propre au vide : elles montrent, en les rapprochant de ce qui précède, qu'il n'y a, dans l'espace, d'autre calorique que celui qui le traverse à l'état de chaleur rayonnante

émise par les parois environnantes. Quant aux changemens de température, qui se manifestent lorsqu'on augmente ou qu'on diminue tout-à-coup, un espace rempli d'air, ils sont uniquement dus aux changemens de capacité calorifique que ce fluide éprouve par l'effet de la dilatation ou de la compression.

Si le point O qu'on a considéré, était pris sur la surface intérieure du vase, la quantité de chaleur qu'il reçoit de tous les autres points de cette surface, serait égale à la constante a multipliée par l'aire de la demi-sphère dont le rayon est l'unité, et non plus par l'aire entière de cette sphère, comme dans le cas précédent. Ce produit $2\pi a$ est aussi égal à la somme des rayons calorifiques, émis dans tous les sens par le point O. D'où il suit que chaque point des parois du vase, émet à chaque instant une quantité de chaleur, égale à celle qu'il reçoit de tous les autres points.

Généralement, si l'on veut connaître la quantité de chaleur envoyée à un point quelconque O, par une portion déterminée des parois du vase, il faudra concevoir un cône qui ait son sommet en ce point, et pour circonférence de sa base, le contour de la paroi donnée; puis décrire de ce même point, comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, une surface sphérique : la quantité demandée sera égale au facteur a, multiplié par l'aire de la portion de surface sphérique interceptée par le cône. Ainsi toutes les fois que deux portions de surfaces rayonnantes, planes ou courbes, concaves ou convexes, seront comprises dans le même cône, à des distances différentes de son sommet, elles enverront à ce point des quantités égales de chaleur, si le facteur a est supposé le même pour tous les points des deux surfaces.

L'analogie qui existe entre la lumière et la chaleur rayonnante, porte à croire que l'émission de la lumière doit se faire, comme plusieurs physiciens l'ont déjà pensé, suivant la loi que M. *Leslie* a trouvée pour la chaleur rayonnante. Dans cette hypothèse, tout ce que nous venons de dire relativement à la chaleur, s'appliquera également à la lumière, et la règle que nous venons d'énoncer, sera aussi celle qu'on devra suivre en Optique, pour déterminer l'éclat d'un corps lumineux vu d'un point donné, ou ce qui est la même chose, pour déterminer la quantité de lumière que ce corps envoie à l'œil de l'observateur.

(*Art. extr., Bullet. de la Sociét. Philom.*) J. G. G.

Un fait important découvert par M. *Arago*, montre que l'empire de l'électricité est plus étendu qu'on ne l'imaginait. On sait que les vacillations de l'aiguille aimantée, rendent longues et difficiles les observations de sa direction, et que si l'on substitue à la suspension par un fil sans torsion, un pivot comme dans les anciennes boussoles, ce n'est souvent qu'aux dépens de la justesse des indications, qu'on se procure l'avantage de les obtenir plutôt. Des expériences récentes ont montré que l'étendue et la durée des vacillations, étaient singulièrement diminuées, en plaçant dans le voisinage de l'aiguille aimantée, une masse de cuivre qui jouit de la propriété d'exercer une action amortissante : par contre, un disque de cuivre mu circulairement avec vitesse, imprime à l'aiguille un mouvement correspondant, quoiqu'elle soit parfaitement isolée, et libre de toute impulsion mécanique. Les autres métaux ont une action analogue, mais beaucoup moins intense.

(Extrait d'une lettre de M. Moreau de Jonnès, *de l'Institut de France, à M.* Dewez, *secrét. perp. de l'Acad. de Brux.)*

A. Q.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Notice sur Grégoire de St.-Vincent.

Grégoire de S.t-Vincent (1), naquit à Bruges, en 1584, c'est-à-dire, l'année même que *Guillaume de Nassau* fut assassiné à Delft par l'infâme *Balthasar Gerard :* sa jeunesse fut entièrement consacrée à l'étude et n'offre rien de remarquable. Ses premiers succès en mathématiques, attirèrent sur lui l'attention des Jésuites qui bientôt après le reçurent dans leur ordre, comme un homme qui devait l'honorer un jour (2). La guerre que l'Espagne soutenait alors avec tant de fureur contre la Hollande et la France, ne le détourna point de ses paisibles occupations. Jamais Géomètre n'a mis plus de persévérance dans ses travaux; aussi sa divise était : *noctu incubando diuque.* Entouré du bruit des armes, il composa son grand ouvrage sur la *quadrature du cercle* et les *sections coniques*, ouvrage qu'il publia en 1647. Cette année est également remarquable par la mort de *Frederic-Henri*, digne fils du *grand Guillaume*, et par la paix de Munster, que les députés

(1) Il ne faut pas confondre ce Géomètre avec le Géomètre anglais *Gregorius* qui paraît avoir donné le premier, pour la quadrature du cercle, la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} -$ etc. Voyez le *Commercium Philosophicum* de *Bernoulli* et de *Leibnitz*, pag. 309 et suiv.

(2) Il fut l'élève du célèbre *Clavius*, et se fit Jésuite à Rome à l'âge de vingt ans. (Dict. Hist. de *Feller.*)

Hollandais conclurent avec Philippe IV qui consentit enfin à reconnaître l'indépendance de la Hollande, et termina de cette manière une guerre désastreuse que le fanatisme avait prolongée pendant 80 ans. Il semble que les révolutions, en exaltant les esprits, produisent les grands hommes : aussi l'on peut regarder cette époque comme la plus brillante de l'histoire des Pays-Bas et de la Hollande.

Grégoire de S.t-Vincent dédia son ouvrage à l'archiduc *Léopold*, gouverneur-général des Pays-Bas. Le frontispice est un chef-d'œuvre de jactance. On aperçoit dans le fond un rayon émané du soleil, qui passant à travers un carré, obéit au compas d'un génie, et vient dessiner sur la terre un cercle lumineux : sur ce rayon admirable se trouve l'inscription : *mutat quadrata rotundis*, qu'un aigle qui s'élève dans les airs avec la couronne impériale, semble lire avec complaisance. On aperçoit ensuite les colonnes d'Alcide et la devise de la maison d'Autriche, *plus ultra*, que Neptune repète à tous les échos. L'auteur, dans son épitre dédicatoire, cite l'exemple d'*Archimède* qui mit également sa mesure du cercle sous la protection d'*Hieron*, roi de Syracuse. C'est sans doute ce grand Geomètre qui, dans le premier plan du frontispice, dessine sur le sable quelques figures que d'autres philosophes contemplent; l'un d'eux met ses lunettes pour mieux les voir. Au reste, si ce frontispice paraît ambitieux, c'est plutôt aux usages du temps qu'il faut s'en prendre qu'à l'auteur même. Car *Grégoire de S.t-Vincent* a toujours fait preuve de modestie, et lors même qu'on l'attaquait, il s'est constamment contenté de la défense de ses disciples *Sarassa* et *Aynscom*. Il nous apprend lui-même dans sa préface, que ce n'est que sur les instances de ses supérieurs, qu'il a consenti à rendre public le fruit de ses veilles; et on peut le croire sur parole; car on sait combien les Jésuites s'attachaient à faire valoir la réputation des hommes instruits de leur ordre : cette ambition était, sans doute, bien excusable, et ils n'auraient jamais mérité que des éloges, s'ils n'en avaient point connu d'autre.

Il paraît que *Grégoire de S.t-Vincent* était aussi recommandable par la douceur de son caractère que par ses connaissances profondes en mathématiques : c'est, au moins, ce que nous apprend le jésuite *Antoine Sarassa*, son élève : il était tellement modeste, dit ce dernier, que lorsque, dans les lettres qui lui étaient adressées,

on lui donnait, non sans raison, les noms d'*Archimède*, d'*Apollonius*, ou qu'on le qualifiait de grand Géomètre, il ne pouvait jamais les lire sans rougir (1).

Aucune étude, en effet, ne peut influer plus efficacement sur les mœurs de l'homme que celle qui tend à le ramener continuellement vers la nature et à lui révéler l'auteur de la création dans ses admirables ouvrages. Avec quelle candeur, avec quelle religieuse simplicité il s'exprime, lorsqu'il parle de ses inventions : *si quid tamen laude dignum fortasse duxeris, totum id Deo adscriptum cupio, cujus honori et gloriæ laboravi toto vitæ meæ tempore; neque sane sine ingenti admiratione Æterni, etiam in minimis, artificii : non enim eum ordinem, symmetriam, proportionem quam in singulis superficiebus corporibusque demonstramus, nos ipsi industria nostra aut arte effingimus, sed jacta jam et æternis legibus ita disposita, felicitate aliqua ingenii; aut quod mihi contegisse profiteor, ejus favore qui omnia tam concinne in partes suas distribuit, invenimus et inventa demonstramus.* Ces aveux, sans doute, ne peuvent partir que d'un cœur pur accoutumé à contempler ce que la création a de plus sublime.

Quand notre auteur commença à s'occuper de la quadrature du cercle, son attention se porta d'abord sur la spirale; mais, sans atteindre le but de ses recherches, il trouva la symbolisation de cette courbe avec la parabole; ou, en d'autres termes, il démontra que la spirale n'est qu'une parabole roulée circulairement d'une certaine manière. Quelque temps après, ayant été appelé à Rome, il fit part de sa découverte au père *Ch. Grienberger* qui jouissait alors d'une grande réputation en Italie. Quelques auteurs, sans cependant alléguer aucun motif plausible, ont voulu attribuer à d'autres Géomètres l'honneur de cette découverte dont notre compatriote est resté en pleine possession. La quadrature du cercle redevint bientôt l'unique objet de ses méditations; mais, sans réussir d'avantage à trouver la solution de ce problême, il fit une ample

(1) *Modestus adeo ut cum* Archimedem *alii; alii* Apollonium, magnum Geometram *alii, litteris inscriptis et non immerito compellant, id ipsum non sine rubore perlegat.*

moisson de découvertes qui seules auraient pu faire la matière d'un gros volume (1), *quæ solæ justum librum constituere potuissent.* Mais ce manuscrit précieux fut détruit à la prise de Prague (nous dirons plus loin comment la chose arriva). Sans perdre de vue l'objet qu'il se proposait, bientôt il chercha la solution de son problême dans les propriétés des sections coniques. Ces nouvelles recherches qu'il continua opiniâtrement pendant 25 ans, nous valurent un trésor d'inventions nouvelles qu'il rendit publiques en 1647. Cet ouvrage étonnant peut être mis en parallèle avec les plus beaux monumens de l'antiquité savante : il est divisé en dix livres qui renferment une vaste théorie des sections coniques, dont l'auteur avait besoin pour résoudre son problême.

Dès l'année 1625, *Grégoire de S.t-Vincent,* comme il nous l'apprend lui-même, avait déjà presque tous ses matériaux, lorsqu'il fut appelé à Rome, où avec le père *Ch. Grienberger,* il s'occupa à revoir son ouvrage : plusieurs mois ne suffirent pas pour la revision même de la moitié du manuscrit, et cependant on le pressait de le publier. Bientôt il reçut deux lettres qui montraient tout le cas qu'on faisait de son mérite (2) : l'une était de l'empereur Ferdinand II qui l'appelait à Prague, et l'autre de Philippe IV qui l'invitait à se rendre à Madrid, pour y remplir les fonctions de Précepteur de son fils, Don Juan d'Autriche auquel il avait aussi attaché le P. *de la Faille,* d'Anvers, qui par la suite, devint l'ami et le compagnon de voyage de son élève. C'est ainsi qu'*Adrien Florent,* d'Utrecht, avait été le Précepteur de Charles-Quint, et qu'on avait vu en honneur à la cour de ce prince et à celle de son fils, *Ambroise,* de Gand, et *Jean Tisnier,* d'Ath; tandis que *Stadius,* de Loënhout, près d'Anvers, était sous Henri III, Professeur royal de Mathématiques et d'Histoire, à Paris; que *Wendelin,* né dans la principauté de Liège, donnait des leçons à

---

(1) *Problema austriacum, plus ultra* : quadratura *circuli. Antw. apud Meursios.*

(2) C'est ainsi que *Pétrarque* reçut à la fois deux lettres qui l'invitaient à venir se faire couronner à Naples et à Rome : ces triomphes honorent ceux qui les accordent et ceux qui les reçoivent.

Gassendi, et qu'*Adrien Romain*, de Louvain, était appelé en Allemagne pour y enseigner la Géométrie. Les choses ont bien changé depuis, et cependant nous ne croyons pas que le Belge ait à rougir devant ses illustres aïeux.

Toute l'Europe était alors sous les armes : on voyait d'une part l'Espagne opposer le célèbre Spinosa à Maurice de Nassau, de l'autre soutenir avec le Pontife romain, l'empereur Ferdinand II contre les attaques opiniâtres du duc de Saxe et de Gustave-Adolphe, que protégeaient encore les intrigues du cardinal de Richelieu et les invasions continuelles des Turcs. La guerre de trente ans était dans toute sa fureur. Ferdinand soutenu par ses généraux Tilly et Wallenstein, était devenu maître de la Bohême; il avait fait sortir de Prague tous les ministres luthériens, et avait confié aux Jésuites l'Université de cette capitale. A peine *Grégoire de St-Vincent* y fut-il arrivé, que de nouvelles lettres plus pressantes que les premières, l'invitèrent de nouveau à se rendre à Madrid, et déjà il se disposait à se remettre en voyage, lorsqu'une attaque de paralysie l'empêcha de l'entreprendre. Plusieurs années après (le 17 septembre 1631), Gustave-Adolphe défit complètement les troupes impériales près de Leipzick, et à la suite de cette victoire, l'électeur de Saxe s'empara de Prague : le soldat se jeta avec fureur dans la ville, et mit tout à feu et à sang : déjà les flammes avaient consumé plusieurs manuscrits du Géomètre brugeois : *Rodricus de Arriaga*, théologien distingué de ce temps, apprend le malheur de son ami : aussitôt, au péril de sa vie, il se précipite vers sa demeure, et jette à la hâte sur une voiture ce qui restait encore de ces manuscrits. Parmi les papiers qui furent la proie des flammes, se trouvaient un volume sur la Statique (1), un recueil considérable de problêmes de Géométrie, ainsi que le Traité de la quadrature dont nous avons parlé : le reste fut transporté à Vienne. Ainsi, dit notre Géomètre, je vis anéantir en moins d'un quart-d'heure, le fruit de plusieurs années de travaux. Lui-même se rendit ensuite à Vienne, avec ceux de son ordre qui

(1) On sait que le célèbre *Stévin*, l'un des fondateurs de la Statique, était de Bruges.

restaient encore. *Montucla* dit qu'il faillit perdre la vie par l'effet de son zèle ardent à porter jusque sur le champ de bataille des secours spirituels aux soldats mourans, et qu'il fut grièvement blessé. On se disposait à le renvoyer en Italie, lorsqu'il retourna vers sa chère Belgique : *inde ad Belgas meos, cum Italiæ rursus destinarer, redii, non ea tamen valetudine qua ab iis discesseram.* Ce ne fut que dix ans après qu'il eut la consolation de voir arriver à Gand les manuscrits qu'il avait laissés en Allemagne.

Lorsque *Grégoire de S.t-Vincent* fit paraître son grand ouvrage, on admira généralement les choses nouvelles et intéressantes qu'il contenait; mais on ne tarda pas à entrevoir une erreur dans sa prétendue quadrature : on vit à la fois s'élever plusieurs adversaires redoutables : le célèbre *Descartes* parut le premier dans la lice : dans une lettre qu'il adressait au P. *Mersenne*, religieux de l'ordre des minimes, avec lequel il avait étudié à la Flèche, il faisait voir que la solution était fausse; ce dernier s'empressa d'en instruire le public; mais en même temps il prêta le flanc à son adversaire : il prétendait que *Grégoire de S.t-Vincent* réduisait la solution du problême à ces termes : étant donnée trois grandeurs quelconques et les logarithmes de deux d'entre-elles, trouver le logarithme de la troisième. Le P. *Sarassa*, élève du Géomètre brugeois, prouva bientôt que, dans cette hypothèse, le problême serait entièrement résolu; et il avait pleinement raison, comme on peut le voir par un ouvrage qu'il publia en 1649, sous le titre : *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno, minimo propositi, Antw.* Bientôt après *Huyghens* (1) fort jeune encore, se présenta également pour combattre un rival pour lequel il professait la plus grande estime. Cette fois, le P. *Aynscom*, autre

(1) Voyez le tom. II des œuvres diverses d'*Huyghens*, imprimées à Leyden en 1724; on y trouve la correspondance avec le jésuite *Aynscom*, et sa réfutation de la prétendue quadrature du cercle : on y trouve aussi une lettre de *Descartes*, concernant le même sujet. *Huyghens* lui-même a proposé une rectification approchée de la circonférence et quelques quadratures partielles. Voyez les Elémens de Géométrie de M. *J. G. Garnier*, pag. 439, édit. de 1818; les Annales Belgiques, cah. de janvier 1821, pag. 73 et la Géométrie de *Van Swinden*.

élève de *Grégoire de S.t-Vincent*, se chargea de répondre au célèbre Géomètre Hollandais, ainsi qu'au jésuite *Vincent Léotaud* (1), dont les attaques n'étaient pas moins pressantes. Le résultat de toutes ces querelles, fut de reconnaître la fausseté de la solution et le génie mathématique de son auteur. Un exemple presqu'unique dans l'histoire de la science, c'est le calme et la modération de *Grégoire de S.t-Vincent*, au milieu des attaques vives et animées de ses antagonistes et de ses défenseurs : il serait à désirer qu'on eût pu en dire autant de tous les quadrateurs (*Genus irritabile*).

L'Europe entière retentissait de la gloire de notre Géomètre : *Leibnitz*, dans les actes de Leipzick, disait que *Descartes*, *Fermat* et *Grégoire de S.t-Vincent*, formaient un triumvirat qui rendit des services plus importans que l'école de *Gallilée* et de *Cavalleri*, le premier pour avoir montré la manière de représenter les lignes par des équations; le second pour avoir trouvé la méthode des *maxima* et des *minima;* enfin le troisième pour ses nombreuses et admirables inventions en Géométrie. Le suffrage d'un homme aussi célèbre est bien plus honorable, je crois, que les éloges exagérés du P. *Castel*, qui dit que les modernes avec leurs *dx*, *dy*, etc., n'ont fait que repasser à la filière ce que le Géomètre flamand a trouvé (2).

En 1653, *G. Aloysius Kinner*, fit paraître à Prague (3) un

---

(1) Il a publié un ouvrage : *Examen circuli quadraturæ*, Lion, 1654, in-4.°, où il montre que l'on travaille vainement à la démonstration de la quadrature du cercle.

(2) Suivant le Dictionnaire historique de *Feller*, le P. *Castel*, disait qu'en possédant bien les ouvrages de *Grégoire de St.-Vincent*, on savait tout *Newton*, et que le Géomètre anglais s'était enrichi des dépouilles du Géomètre flamand. La postérité n'a pas ratifié le dire du P. *Castel*.

(3) Elucidatio Geometrica problematis austriaci, sive quadraturæ circuli, feliciter tandem detectæ per *R. P. Gregorium a St.-Vincentio*, clarissimum et subtilissimum ævo nostro Geometram, auct. *Aloysio Kinner*, à Lowenthurm, 1653, in-4.°, 54 pag. Ce vol. devenu très-rare m'a été communiqué par M. *Van Hulthem*, l'un des curateurs de l'Université de Gand, qui l'a acheté à la vente de M. *Dubois de Schoondorp*, Géomètre Gantois peu connu et dont nous parlerons dans un prochain numéro.

ouvrage dans lequel il se proposait d'exposer d'une manière succincte la découverte de la quadrature du cercle, de *Grégoire de S.t-Vincent*. L'auteur, comme il l'observe, avait été forcé de rejeter dans différens endroits de son ouvrage, les propositions sur lesquelles il établit de plusieurs manières la quadrature du cercle. Pour obvier à cet inconvénient, qui force le lecteur à des recherches, *Kinner* résume en peu de pages tout ce qui a rapport à la seconde solution qui lui paraît la plus simple. En donnant les éloges les plus exagérés à *Grégoire de S.t-Vincent* qu'il regarde comme le premier Géomètre de son siècle, il parle assez modestement de son propre travail; *summum mihi illud tribues*, dit-il, *quod antiquitas illi qui Homeri Iliadem nuci incluserat.*

Vers la fin de sa vie, *Grégoire de S.t-Vincent* s'occupa du problême de la duplication du cube; mais, au milieu de ses savantes recherches (1), il fut frappé d'apoplexie et mourut à Gand, où il professait les Mathématiques, le 27 janvier 1667, à l'âge de 83 ans, après avoir célébré trois jubilés; *post celebratum triplicem jubilæum, religionis, sacerdotii et traditæ matheseos.* Son corps fut déposé dans l'ancienne église des Jésuites, c'est-à-dire, au lieu même ou se trouve maintenant le palais de l'Université : quel intérêt ne doivent pas inspirer des leçons données, pour ainsi dire, sur le tombeau d'un grand homme, dans des lieux où semble planer encore son vaste génie, et qui réclament son buste?

Tous les manuscrits de ce grand Géomètre, au nombre de 13 vol. in-f.o sont déposés à la Bibliothèque de Bruxelles, et en forment un des ornemens les plus précieux. Ce sont les papiers sur lesquels il jettait ses premières idées, pour les recueillir ensuite et en former ses ouvrages : l'écriture, assez belle d'ailleurs, est souvent illisible; généralement les figures tracées au crayon de mine de plomb, ou bien au crayon rouge, sont assez bien exécutées; le

(1) *Opus Geometricum posthumum ad mesolabium; per rationum proportionalium novas proprietates. Finem operis mors autoris antevertit* : in-fol. Gand, 1668, avec un portrait de *Grégoire de St.-Vincent.* On a encore de lui (voyez *Toppens*) *Theoremata mathematica scientiæ Staticæ de ductu ponderum per planitiem, proposita. Lovanii*, 1624, in-4.o

trait en est ferme, et l'on serait tenté de croire qu'il employait des instrumens propres à décrire d'un mouvement continu toutes les lignes du second degré.

Ce n'est point sans une certaine admiration que l'on voit ces pages précieuses qu'un ami courageux sauva de l'incendie de Prague, et que le temps nous a conservées à travers les révolutions : en les parcourant, on croit voir revivre le Géomètre et respirer son génie; on croit descendre avec lui dans ses profondes méditations, et assister pour un instant à ses brillantes découvertes : il serait à désirer qu'un ami des sciences prît la peine d'examiner ce rare monument; il y trouverait peut-être des choses qu'aujourd'hui même nous ignorons; car les sections coniques offrent une source intarissable de propriétés, et l'on ne peut dire sans témérité que cette matière est épuisée. Pour parvenir à de nouvelles découvertes, suivons de nouvelles routes : c'est avec la conviction de ce principe que *Grégoire de S.t-Vincent*, commença ses recherches. *A præclaris hoc ævo viris factum video, ut dum ad idem problema se accingunt, veteri relicta, novam sibi Geometriæ formam effinxerint, et per præruptos calles quos suo sibi marte aperuerunt, eniti eo conati sint, quo alios tendere quidem semper, nunquam tamen perventuros videbant.*

A. Q.

OBSERVATIONS.

1.° C'est à tort que dans une note, pag. 99 de la Correspondance, n.° II, nous avons annoncé que M. le *L.t-Colonel Van Gorkum*, directeur des Reconnaissances militaires, vient de publier un ouvrage en langue nationale, ayant pour titre, etc. : le mot *publier* est impropre en ce sens que l'ouvrage ne doit pas être mis en vente : c'est une *instruction spéciale* exclusivement faite pour MM. les Officiers du corps : en retirant cette annonce que nous avons insérée sans l'autorisation de l'auteur, nous ne revenons pas sur le jugement que nous en avons porté.

2.° M. *Sluys*, nous écrit : « je viens de vérifier l'observation » qui vous a été adressée au sujet du théorème n.° I, pag. 5.° » de la Correspondance : la démonstration de M. *Van Swinden*, » quoique plus compliquée, est aussi établie au moyen de l'ab-» surde, tournure naturelle, une fois l'énoncé du théorème posé, » avantage que m'avait procuré votre correspondance : vous m'obli-» gerez donc de ne pas insérer ma démonstration. »

D'abord, la démonstration de M. *Sluys* était déjà imprimée, lorsque sa lettre nous a été remise; en second lieu, et puisque de son aveu, elle est plus simple que celle de M. *Van Swinden*, elle était bonne à publier : en troisième lieu, tout ceci a du moins l'avantage de faire connaître à ceux de nos lecteurs qui ne savent pas la langue nationale, ainsi qu'à nous, les recherches des savans de la partie septentrionale du royaume, et à montrer qu'on ne doit pas négliger la lecture de leurs ouvrages.

3.° Nous avons bien dit, not. pag. 101, n.° II de la Corresp., que l'analyse de la nouvelle édit. de l'exposition du système du monde par M. le marquis *De Laplace*, est de M. *Francœur*; mais nous avons oublié d'ajouter qu'elle est extraite de la *Revue Encyclopédique* : nous devions réparer cette omission.

J. G. G.

ANNONCES.

Le cahier de juin des Annales de Mathématiques de M. *Gergonne*, contient un extrait fait par cet habile Géomètre d'un mémoire de M. *Dandelin*, membre de l'Académie de Bruxelles et professeur de Métallurgie à l'Université de Liège, lequel a pour titre : *Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagônes inscrits et circonscrits à ces sections* : il est terminé par cette phrase : « Si les recueils de l'Académie Royale des Sciences de Bruxelles, » offrent souvent des mémoires du mérite de ceux de MM. *Quetelet* » et *Dandelin*, ils ne pourront manquer d'être recherchés et ac-» cueillis par les amateurs de la belle Géométrie. »

J. G. G.

Académie royale des Sciences et Lettres de Bruxelles, séance du 6 juin.

M. *Dandelin*, recemment nommé Professeur à l'Université de Liège, vient d'adresser à l'Académie un mémoire sur *les intersections de la sphère et d'un cône du second degré*, il montre que les perspectives de ces courbes qu'il comprend sous le nom de *Lemniscates*, sont les développantes des caustiques par réflexion des sections coniques (1). Ce mémoire renferme plusieurs théorèmes curieux que nous ferons connaître par la suite.

M. *Moreau de Jonnès*, membre correspondant de l'Institut de France, auteur du mémoire sur le déboisement des forêts, couronné par l'Académie Royale de Bruxelles, nous annonce que l'Institut de France vient de décerner le prix fondé par *La Lande*, à M. *Herschel fils* (2), pour ses belles observations sur les étoiles doubles et triples.

---

(1) En appliquant le théorème énoncé, 1.er cahier de la Correspondance, pag. 14, aux sections coniques, nous sommes parvenus à des résultats à peu près semblables qui se trouvent consignés dans un mémoire sur les caustiques, qu'on trouve dans le troisième volume du recueil de l'Académie de Bruxelles; mais notre collègue et ami M. *Dandelin*, n'avait aucune connaissance de notre travail, lorsqu'il entreprit les recherches que nous annonçons.

A. Q.

(2) Les mémoires du célèbre *Herschel*, contiennent sur la constitution de l'univers et les astres qui peuplent les cieux, les recherches les plus importantes : voici les titres et le sujet des principaux : ils se trouvent dans *les Transactions philosophiques de la société royale de Londres et dans le Journal de Physique*.

L'intérêt et l'importance de ces découvertes, ont engagé un anglais, M. *Sawt*, a poursuivre ces curieuses investigations, et, à cet effet, il a consacré sa fortune à l'établissement d'un observatoire près de Paris : M. *De Jonnès* ajoute que M. *Sawt* partage le prix de *La Lande* avec M. *Herschel*. Dans notre prochain numéro, nous donnerons à nos lecteurs de plus amples renseignemens sur les découvertes de M. *Herschel fils*.

1780 *et* 1781. *Sur la hauteur des montagnes de la lune, et la rotation des planètes.*

1783. *Sur le mouvement propre du soleil et du système solaire, avec la description des changemens qui ont eu lieu parmi les étoiles depuis Flamsteed.* — Constate le mouvement des étoiles, entrevu par *Mayer*, mais qu'*Herschel* a démontré.

1784 et 1785. *Sur la structure des cieux.* — Contient les idées de l'auteur sur les nébuleuses et la voie lactée, et sur notre position dans le plan de cette dernière.

1788. *Catalogue des étoiles doubles, triples, quadruples et multiples.* — Travail qui aurait suffi pour immortaliser un Astronome.

1789 - 1800. *Plusieurs catalogues de nébuleuses et amas d'étoiles.* — Donne la position de 2500 de ces amas, avec quelques remarques sur la construction des cieux.

Observations sur la nature du soleil, sur la direction et la vitesse du système solaire; sur la planète Saturne; sur l'arrangement local des corps célestes dans l'espace et l'étendue de la voie lactée, etc.

Sur les distances relatives des groupes d'étoiles et les limites que peuvent atteindre nos télescopes. — Etablit qu'une étoile de 1.re grandeur serait visible à l'œil nu, si elle était 12 fois plus loin; mais qu'avec les meilleurs télescopes on la verrait encore à une distance 2300 fois plus grande.

1821. Son dernier mémoire est sur *les lieux de* 145 *nouvelles étoiles doubles.*

(*Extr. de l'Encyclopédie portative, Astronomie.*) J. G. G.

Développement d'une pensée de D'Alembert, ou introduction à l'application de l'Algèbre à la Géométrie, par A. P. Gaudin, *ancien élève de l'Ecole polytechnique. Paris,* 1825, *in-8.° de* 34 *pages avec une planche.*

M. *Gaudin* s'attache à rendre plus claire et plus précise, la notion des quantités positives et négatives, et à prouver qu'on a dû les distinguer, comme on le fait, par les signes de l'addition et de la soustraction; c'est principalement en traitant des questions de Géométrie qu'il développe ses idées sur la nature de ces quantités. M. *Van Rées,* professeur extraordinaire de Mathématiques à l'Université de Liège, nous annonce qu'il s'occupe de l'analyse d'un ouvrage sur le même sujet, de M. *De Gelder,* professeur de Mathématiques à l'Université de Leyden, analyse qui sera consignée dans un de nos prochain numéros.

Essai sur la méthode directe du calcul intégral par M. Simonoff, *professeur à l'Université impériale de Casan. Paris,* 1824, *in-4.° de* 40 *pages.*

Le mémoire de M. *Simonoff* a reçu les éloges de l'Académie des sciences de Paris : il est l'ouvrage d'un homme exercé à manier le calcul analytique, et il présente sous de nouveaux points de vue, des théories depuis long-temps connues, mais dont on n'avait pas encore tiré tout le parti possible. Ce mémoire comprend deux parties dont la seconde offre des applications des principes posés dans la première.

(*Extr. de la Revue Encycl.*) J. G. G.

Remarque sur la Théorie Mathématique de la chaleur rayonnante, par M. FOURIER, *l'un des secrétaires perpétuels de l'Académie des sciences de Paris, Annales de Chimie et de Physique, avril* 1825.

On a publié, dit l'auteur, dans ce recueil, divers articles concernant l'équilibre de la chaleur rayonnante. Cette discussion a pour objet de fixer avec précision les élémens d'un nouveau genre de questions, et de porter les Physiciens et les Géomètres à en approfondir l'étude. Nous rendrons compte de ce travail de M. *Fourier*, comme nous l'avons fait (pag. 150), de celui de M. *Poisson* sur le même sujet.

J. G. G.

Note adressée à la Société royale de Londres, le jeudi 13 *janvier, par le capitaine* H. KATER, *sous le titre :* Description d'un collimateur flottant (1).

Cet instrument est destiné à remplacer le niveau ou le fil à plomb dans les observations astronomiques, et à donner un moyen très-exact pour déterminer la position d'un point horizontal ou zénithal sur le limbe d'un cercle ou d'un secteur. Le principe d'après lequel il est construit, repose sur l'invariabilité de position à l'égard de l'horizon, que prend un corps pesant de figure inva-

---

(1) Cette annonce traduite de l'Anglais par A. Q., nous a été communiquée par M. le professeur *Van Breda* qui, depuis, a bien voulu nous remettre le mémoire même de M. *H. Kater*, consigné dans les *Transactions Philosophiques*, année 1825.

riable, flottant sur un fluide. Il consiste en une boîte rectangulaire contenant du mercure sur lequel flotte un morceau de fer, d'environ douze pouces de longueur, sur quatre de largeur, avec deux petits montans d'égale hauteur, ne formant qu'une pièce avec le reste. Sur ces petits montans se trouve fixé une petite lunette garnie de fils croisés, ajustés avec la plus grande exactitude au foyer de l'objectif. Le système est bruni par l'acide nitrique pour prévenir l'adhésion du mercure, et ne peut prendre de mouvement latéral, à cause de deux pointes de fer doucement polies qui s'avancent sur les côtés vers le milieu de sa longueur, et jouent librement dans des rainures verticales pratiquées dans les parois de la boîte.

Lorsqu'on veut se servir de cet instrument, on le place à peu de distance du cercle, sur le limbe duquel on veut déterminer un point de l'horizontale qui contient le centre, par exemple, le point tourné vers le nord : puis on ajuste les lunettes du cercle et du collimateur de manière à apercevoir mutuellement leurs fils croisés (comme l'ont indiqué récemment MM. *Ganso* et *Bessel*), d'abord approximativement par un premier essai, en appliquant alternativement l'œil aux oculaires des deux instrumens, et finalement en éclairant les fils croisés du collimateur par une lampe et du papier huilé, en prenant soin d'écarter les faux jours par un écran noir ayant une ouverture égale à celle du collimateur, et en établissant la coïncidence comme dans les observations astrononiques, par un mouvement doux du cercle : on lit alors au moyen des microscopes, les degrés indiqués sur le limbe, et l'on connaît ainsi la distance zénithale apparente du point de collimation (intersection des fils); on porte alors le collimateur dans la partie opposée du cercle tournée vers le sud, et l'on fait une observation analogue, sans renverser le cercle, mais seulement en faisant tourner la lunette sur le limbe. La différence des deux distances zénithales trouvées, fait connaître le double de l'erreur dont est affecté le point zénith ou le point horizontal sur la graduation du limbe, et la demi-somme est la distance zénithale vraie du point de collimation.

D'après des expériences citées par le capitaine *Kater*, il paraît que l'erreur que l'on a à craindre dans la détermination du point

horizontal, par le moyen de cet instrument, peut rarement s'élever à une demi-seconde, si l'on prend une moyenne entre quatre ou cinq observations; sur 151 essais particuliers, deux seulement ont donné une erreur de deux secondes, et l'un d'eux était fait avec un flotteur en bois. Sur plus de 120 observations faites avec ce dernier instrument, l'erreur n'était pas d'une seconde.

A. Q.

Mémoire sur un nouveau moyen d'emplir et de vider les écluses, suivi de notes sur l'écoulement des fluides. Considérations sur le développement et la largeur à donner aux courbes des canaux; par J. P. G.t, *ingénieur ordinaire de seconde classe au corps royal des ponts et chaussées de France; in-4.o de 145 pages, avec cinq planches parfaitement soignées, Paris,* 1825.

Avant d'expliquer, dit l'auteur, le procédé que je propose pour emplir et pour vider les sas d'écluses, il est nécessaire de passer en revue les moyens employés jusqu'à ce jour, afin de mieux faire ressortir les inconvéniens auxquels je pense rémédier. L'Italie moderne n'est point avare de louanges envers les grands hommes qu'elle a produits dans tous les genres : on l'accuse, au contraire, de les prodiguer à des auteurs et à des artistes bien en arrière de ceux qui font la gloire de leur nation. Cependant les constructeurs peuvent lui faire un reproche tout opposé, s'il est vrai qu'elle ait négligé de faire connaître à la postérité l'inventeur des écluses à sas, dont les premières paraissent avoir été exécutées chez elle, à la fin du XV.e siècle. Nous ne connaissons même aucune description des premières écluses, en sorte que nous ne pouvons reprendre dès son enfance, cette partie si importante de l'architecture hydraulique. A cette occasion, on trouve cette note : *L'ouvrage de* Simon Stévin, *composé en* 1618, *quatorze ans après le commence-*

ment des travaux du canal de Briare (*entrepris en* 1604, *par les ordres de Henry IV*), *semblerait reculer d'un siècle l'invention des sas d'écluses; mais il se peut que les Ingénieurs Hollandais aient ignoré les travaux exécutés en Italie, et qu'ils ne fussent dater l'époque de la découverte, que du moment de son introduction dans leur pays. Les discussions relatives à des inventions plus modernes, telles que la construction des ponts en fer et celle des écluses à sas mobile, peuvent donner quelque consistance à cette opinion.*

J. G. G.

Manuel de Physique, ou Elémens abrégés de cette Science, mis à la portée des Gens du monde et des étudians; par C. Bailly, *membre de la Société Linnéenne de Paris, et de plusieurs autres Sociétés savantes, élève de MM.* Biot, Arago *et* Gay-Lussac. *Paris*, 1825.

Ce manuel contient l'exposé complet et méthodique des propriétés générales des corps solides, liquides et aériformes; ainsi que les phénomènes du son; suivi de la nouvelle théorie de la lumière dans le système des ondulations, et de celle de l'électricité et du magnétisme réunis. Nous pensons, mais sans oser l'affirmer, que c'est ce même M. *Bailly* qui, sous le titre d'avocat à la Cour royale de Paris, de membre de plusieurs Sociétés savantes, et d'auteur de divers ouvrages sur les sciences, a publié la partie astronomique de l'*Encyclopédie portative, ou résumé universel des Sciences, des Lettres et des Arts*, qui paraît en traités séparés faits par une Société de savans et de gens de lettres, sous les auspices de MM. *De Barante, De Blainville, Champollion, Cordier, Cuvier, Depping, Ch. Dupin, Eyriès de Ferussac, De Gerando, Jomard, De Jussieu, Laya, Letronne, Quatremere de Quincy, Thenard* et *autres savans illustres* qui, d'après les engagemens qu'ils paraissent avoir pris, ne sont pas tenus de rédiger. Voilà donc une

nouvelle Encyclopédie qui surge auprès d'une autre *Encyclopédie, ou Dictionnaire abrégé des Sciences, des Lettres et des Arts, avec l'indication des ouvrages où les divers sujets sont développés et approfondis, par M.* Courtin, *ancien magistrat, et par une société de gens de lettres,* avec l'épigraphe : *qui philosophiam fugiendam putat, nihil vult aliud quam nos non amare sapientiam* (Saint Augustin). J'oubliais de dire que le petit Traité encyclopédique d'astronomie, en 224 pages, in-32, suivi d'une courte Bibliographie et d'un Vocabulaire astronomiques, avec trois planches, porte celle-ci : *Scientia est amica omnibus* (Platon). Nous avons déjà un volume de la petite Encyclopédie et cinq de l'autre. Nous nous bornerons ici à la simple annonce de ces ouvrages, nous réservant d'en parler plus au long, si MM. les collaborateurs veulent bien les achever.

J. G. G.

Traité de Gnomonique, ou Méthode simple et facile, pour tracer les cadrans solaires sur toutes sortes de plans, sans aucun calcul, précédé d'un précis sur la sphère, avec la manière de construire les instrumens nécessaires, par P. A. B. Dupont, 1 *vol. in*-8.° *de* 37 *pages, avec* 3 *planches, Paris,* 1825.

L'auteur est d'opinion que la Gnomonique est une des sciences les plus utiles, et que sa méthode est préférable à toutes celles qu'on a suivies jusqu'à présent; on me reprochera peut-être, dit-il, de ne point procéder assez géometriquement; mais j'aime mieux m'exposer à la critique de quelques-uns qui ne jugent bon que ce qu'ils font, et n'oublier jamais que je travaille pour le plus grand nombre. Il est remarquable que, dans les sciences comme dans la littérature, les prétentions sont toujours en raison inverse de l'importance de productions. Les savans et les littérateurs du premier ordre, ne parlent guères de leurs devanciers qu'avec éloge; ceux du dernier veulent faire une Ere nouvelle.

J. G. G.

Gœttingische gelehrte anzeigen (Annonces littéraires de Gœttingue) n.° 59, 11 avril 1825.

Le 5 avril, le professeur *Gauss* a présenté à la Société royale des Sciences (à Gœttingue), un mémoire intitulé : *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima* (1).

La théorie des restes quadratiques forme, comme on sait, une des parties les plus intéressantes de la haute arithmétique, et cette partie, après les recherches multipliées dont elle a été l'objet, peut être considérée comme achevée maintenant. On trouve sur cette théorie des notices historiques dans ce journal (1808, n.° 76 et 151; 1817, n.° 40). Dans les feuilles citées, il a aussi été donné un aperçu préliminaire des recherches que l'auteur du présent mémoire a consacrées depuis 1805 à la théorie non moins intéressante et féconde, mais beaucoup plus difficile encore, des restes cubiques et biquadratiques. Quoiqu'il posséda déjà alors les points essentiels de ces diverses théories, il a été jusqu'à ce jour empêché par d'autres occupations de communiquer au public le résultat de ses recherches; ce n'est que dans ces derniers temps, qu'il a trouvé assez de loisir pour en développer et rédiger une partie. Il a commencé par la théorie des restes biquadratiques, parce qu'ils ont plus de connexion encore que les restes cubiques, avec les restes quadratiques. Cependant il n'a nullement l'intention de présenter en son entier, dans le présent mémoire, ce sujet extrêmement fécond et riche : il réserve pour la suite de ce travail, l'exposition développée de la *Théorie générale*, qui exige que l'on donne une extension toute particulière au champ de la haute arithmétique. Il offre donc dans ce mémoire, seulement celles de ses recherches qui sont susceptibles d'une exposition complette, sans l'extension préalable de

(1) Je dois à l'obligeance d'un de mes amis, cette traduction de l'analyse faite en langue allemande par l'auteur même de l'ouvrage.

J. G. G.

la science dont il parle; dans l'annonce présente, il ne pourra qu'indiquer rapidement une partie des résultats qu'il a obtenus.

Un nombre entier a est nommé *reste biquadratique* du nombre entier p, lorsqu'il y a des nombres de la forme $x^4 - a$ qui peuvent être divisés par p. Le même nombre est appelé *non-reste biquadratique*, lorsqu'il n'y a point de nombres de la même forme, qui soient divisibles par p. Il est évident que tout reste biquadratique de p, est en même temps reste quadratique du même nombre, et que tout reste non-quadratique ne peut être reste biquadratique. Il suffira de restreindre cette recherche au cas spécial où p est un nombre premier de la forme $4n + 1$, et a non-divisible par p : car tous les autres cas peuvent facilement être rappelés à celui-ci.

Les recherches sur cette matière, se divisent en deux parties, selon qu'on considère comme donné ou p, ou a. La première partie est d'une difficulté beaucoup moindre que la seconde; on peut même la regarder, comparativement à l'autre, comme tout-à-fait élémentaire. Tout ce qu'il y a d'essentiel à dire sur cette partie, se trouve exposé complettement dans le mémoire.

Quant à la seconde partie, l'auteur n'a, pour le moment, traité encore que quelques cas spéciaux qui pouvaient être exposés sans de trop grands préliminaires et servir comme introduction à la *Théorie générale* qu'il se propose de donner par la suite. Ces cas sont les suivans, savoir : 1.° $a = -1$, et 2.° $a = \pm 2$; le premier n'a point de difficulté, l'auteur ayant déjà démontré dans son ouvrage : *Disquisitiones arithmeticæ* que -1 est un reste biquadratique de p, toutes les fois que p a la forme $8n + 1$; mais seulement un reste quadratique et non biquadratique de p, lorsque p est de la forme $8n + 5$. La chose est tout-à-fait différente, dans le cas $a = \pm 2$. Il est connu, à la vérité, depuis long-temps que $+2$ et -2 sont des non-restes quadratiques, et par conséquent des non-restes biquadratiques de p, quand p a la forme $8n + 5$, et des restes quadratiques, au moins, si p est de la forme $8n + 1$. On sait de même que, dans cette forme, $+2$ et -2 deviennent de p, ou des restes biquadratiques tous les deux, ou des non-restes biquadratiques tous les deux. Mais il faut recourir à des considérations d'un ordre plus élevé, pour distinguer lequel de ces deux cas doit avoir lieu. Dans le mémoire, on trouvera pour ce cas, deux *criteria* différens.

Le premier *criterium* se lie avec la résolution du nombre p en un quarré simple et un quarré double, laquelle résolution (attendu que p est supposé être un nombre premier) est toujours possible, et ne peut se faire que d'une seule manière. Supposez $p = gg + 2hh$: alors ± 2 deviendra un reste biquadratique de p, si g est de la forme $8n + 1$, ou $8n + 7$; mais il deviendra un non-reste biquadratique, si g est de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$.

Le second *criterium* se lie avec la résolution du nombre p en deux quarrés, laquelle, comme on sait, est également toujours possible et ne l'est que d'une seule manière. Posez $p = ee + ff$, et supposez que ee est le quarré impair, et ff le quarré pair : il s'en suit de la forme supposée de $p = 8n + 1$, qu'aussi $\frac{1}{2}f$ devient un nombre pair : ainsi f deviendra ou de la forme $8m$ ou de la forme $8m + 4$. Dans le premier cas, ± 2 sera reste biquadratique; dans l'autre, il sera non-reste biquadratique de p.

Nous faisons ici en passant l'observation à laquelle l'arithmétique transcendante donne si souvent occasion, que c'est bien moins la beauté et la simplicité d'un théorème, qui le rendent remarquable, que la difficulté que l'on a pour le fonder en principe. Dès que l'on a été amené une fois à supposer une liaison entre le rapport du nombre ± 2 et les deux résolutions mentionnées du nombre p, il est très-facile de découvrir réellement cette liaison par le moyen de l'induction. Mais déjà, dans le premier *criterium*, la démonstration n'en est point facile. Elle est plus cachée encore dans le second, où elle se trouve entièrement liée avec des recherches subsidiaires très-délicates qui elles-mêmes nous conduisent de nouveau à une extension très-remarquable de la théorie de la division du cercle. C'est principalement cet enchaînement de vérités, comme on l'a observé souvent, qui donne tant d'attraits à la haute arithmétique. Du reste, ces démonstrations elles-mêmes ne comportent point d'analyse; il faut les lire dans le mémoire même. Mais deux autres nouveaux théorèmes arithmétiques, qui sont intimément liés avec la démonstration du second *criterium*, méritent, à cause de leur simplicité, d'être indiqués ici.

Si p est un nombre premier de la forme $4k + 1$, et qu'on le pose $= ee + ff$, de sorte que ee signifie le quarré impair, ff le

quarré pair; si de plus on fait

$$1.2.3\ldots\ldots k=q$$

$$(k+1)(k+2)(k+3)\ldots\ldots 2k=r$$

alors $\pm e$ sera toujours le reste le plus petit qui résultera de la division de $\frac{r}{2q}$ par p, et $\pm f$ le reste le plus petit provenant de la division de $\frac{1}{2}rr$ par p, (le reste le plus petit est toujours censé pris entre les limites $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$). Le nombre $\frac{r}{2q}$ qui, pour $p=5$, reçoit la valeur 1, peut, pour des valeurs plus grandes de p, être mis aussi sous la forme suivante :

$$\frac{6.\ 10.\ 14.\ 18\ldots\ldots(p-3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots\ldots k.}$$

Il est très-remarquable que l'on peut obtenir ainsi la résolution du nombre p, en deux quarrés, par une voie tout-à-fait directe : mais ce qui est plus remarquable encore, c'est la circonstance accessoire qui a lieu en même temps, savoir qu'on trouve toujours par ce procédé, la racine du quarré impair e, avec le signe positif, si e pris comme positif, est de la forme $4m+1$; et avec le signe négatif, si e pris comme positif, est de la forme $4m+3$. Quant au signe sous lequel la racine du quarré pair f résulte de cette opération, on n'a encore pu parvenir à une règle générale, ni à priori, ni par le moyen de l'induction : c'est pourquoi l'auteur, à la fin de sa dissertation, recommande cet objet à la sagacité et aux recherches ultérieures de tous les amis de l'Arithmétique supérieure, persuadé qu'il est que le succès de cette recherche ouvrira en même temps une source féconde pour de nouveaux perfectionnemens de cette belle partie de l'Arithmétique.

J. G. G.

Questions proposées par la Faculté des sciences Physiques et Mathématiques de l'Université d'Utrecht, pour l'année 1826.

Quæstio Mathematica.

Explicentur præcipui modi quibus calculi differentialis principia demonstrare conati sunt Mathematici, et quid de singulis hisce modis existimandum sit (1).

Quæstio Zoölogico-œconomica.

Exponatur apis mellificæ. Linn. succincta anatome, historia naturalis et usus œconomicus, adhibitis et dijudicatis veterum et imprimis recentiorum hac de re observationibus et experimentis.

Questions à résoudre.

1.° Etant donnée une section conique dont F est le foyer (*fig.* 13), menez les deux droites FM et FN, la corde MN et les tangentes MT et NT; faites varier ensuite les deux droites FM et FN de manière à ce que l'angle MFN ne varie pas : cela posé, démontrer que la courbe à laquelle la corde MN sera toujours tangente et celle engendrée par le point T, seront deux sections coniques ayant un foyer commun en F.

2.° Etant données trois sections coniques semblables et dont les axes sont parallèles, trouver une quatrième section conique assujettie aux mêmes conditions, et qui touche les trois autres.

---

(1) Quæ questio denuo proponitur, cum responsio hoc anno ad facultatem missa, neque satis accurate et perspicue conscripta fuerit, neque sermone latino se commendaverit.

M
4
5
6
B
h'
5
6
M'
1'
10.
A
c
K
b
a
C
A'
c'
K'
b'
a'
C'
M
T'
C'
c'
H'
C
T
c
N
T
Fig. 13.
M
Q

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

TRIGONOMÉTRIE.

J'avais eu l'intention de proposer cette question : *Prouver directement que, dans tout triangle rectiligne obliquangle, la somme de deux côtés, est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles respectivement opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence des mêmes angles*, c'est-à-dire, sans employer comme on le fait ordinairement, la proportionalité des sinus aux angles, ou plutôt cette proposition qui en est une conséquence : *la somme de deux côtés, est à leur différence, comme la somme des sinus des angles opposés, est à la différence des mêmes sinus.* Je m'étais même occupé de la recherche de cette démonstration, lorsque j'en trouvai une très-simple et très-élégante dans l'ouvrage de M. *Lescan*, professeur de l'Ecole Royale de navigation à Bordeaux, ayant pour titre : *Trigonométries et calcul des différences, appliqué aux Trigonométries*, ouvrage très-recommandable que je connaissais déjà, mais dans lequel je n'avais pas remarqué cette abréviation. Comme probablement elle n'est pas aussi connue qu'elle mérite de l'être, je pense qu'elle ne paraîtra pas déplacée dans ce recueil.

J. G. G.

Soit (*fig.* 14) BAC le triangle en question : portez CA sur CB et sur son prolongement ; vous déterminerez ainsi les points F et E ; tracez les droites AF et AE ; prolongez la dernière, et du point B menez BG parallèle à FA. Les trois lignes CA, CE et CF étant égales, la circonférence décrite du centre C, avec une de ces droites pour rayon, passera par F, A et E, et l'angle EAF sera droit. Dans le triangle CAF, les deux angles CAF et CFA sont égaux ; mais leur somme est égale à celle des deux angles CAB et CBA du triangle CBA, en observant qu'on a $CAF = CAB - FAB$ et $CFA = CBA + FAB$: d'ailleurs l'angle $CBG = CFA = CAF$; donc

$$GBG = CAF = \tfrac{1}{2}(CAB + CBA),$$

d'autre part

$$\begin{aligned} FAB &= CAB - CAF \\ &= CAB - \tfrac{1}{2}(CAB + CBA) \\ &= \tfrac{1}{2}(CAB - CBA) \end{aligned}$$

Or, la ligne FA parallèle à BG, coupe les côtés EB et EG de manière que

$$BE : BF = GE : GA ;$$

mais si l'on représente le rayon des tables par la perpendiculaire BG, la ligne GE sera la tangente de l'angle EBG, et GA sera celle de l'angle ABG ou de son égal FAB ; on aura donc

$$GE = \text{tang. } EBG = \text{tang. } CBG = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(CAB + CBA)$$

$$GA = \text{tang. } ABG = \text{tang. } FAB = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(CAB - BCA)$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned} BE &= BC + CE = BC + CA \\ BF &= BC - CF = BC - CA \end{aligned}$$

substituant ces valeurs dans la proportion ci-dessus, on a

$$BC + CA : BC - CA = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(CAB + CBA) : \text{tang. } \tfrac{1}{2}(CAB - CBA)$$

(*Art. extrait.*) J. G. G.

La recherche du troisième côté c, n'exige que les seules données de la question, lorsqu'on a recours à la formule connue

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. C}$$

qu'il est facile de simplifier. A cet effet, on a d'abord $\cos. C = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}C$: ce qui donne

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin.^2 \tfrac{1}{2} C}$$

$$= (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab \sin.^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}} = (a-b)\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \phi}$$

en posant $\frac{4ab \sin.^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2} = \text{tang.}^2 \phi$; d'où

$$\text{tang.}\, \phi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} C}{(a-b)} \times \sqrt{ab} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Mais à cause de $\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \phi} = \text{sec.}\, \phi = \frac{1}{\cos.\, \phi}$, on a enfin

$$c = \frac{a-b}{\cos.\, \phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Les formules (1) et (2) se prêtent immédiatement à l'emploi des logarithmes.

J. G. G.

Sur quelques propriétés des triangles, en tant qu'elles dépendent des cercles circonscrit et inscrits intérieurement et extérieurement.

Parmi les propriétés qui font le sujet de cet écrit, les unes sont connues, mais démontrées autrement qu'on ne l'a fait ici : quant aux autres qui en dépendent plus ou moins directement, nous les croyons nouvelles, et toutes ensemble forment un corps

de doctrine, qui peut avoir quelqu'intérêt et surtout provoquer de nouvelles recherches, ou fournir de nouvelles combinaisons qui nous auraient échappé. Comme les formules que nous donnons ici, sont dépendantes les unes des autres, nous sommes forcés d'en offrir l'ensemble, quoiqu'il excède l'étendue ordinaire de nos articles.

Du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 15), abaissons les perpendiculaires OM, OM′ et OM″ sur les trois côtés du triangle (1), et décrivons avec le rayon $Oc = 1$, l'arc *ct*, et menons la tangente *tm*; les triangles semblables OMC et *otm* donneront les proportions

$$OM : MC = Ot : tm$$

$$OM : 1 = OC : Om$$

posant

$$OM = p, OM' = p', OM'' = p'', BC = a, AC = b, AB = c, OC = r$$

et observant que $tm = \text{tang. A}, OM = \text{sec. A} = \frac{1}{\text{cos. A}}$, les proportions ci-dessus donneront

$$p = \frac{\frac{1}{2}a}{\text{tang. A}};\ p = r\ \text{cos. A}$$

on aurait ainsi

$$p' = \frac{\frac{1}{2}b}{\text{tang. B}};\ p' = r\ \text{cos. B}$$

$$p'' = \frac{\frac{1}{2}c}{\text{tang. C}};\ p'' = r\ \text{cos. C}$$

---

(1) La figure (15) donne à la seule inspection, la propriété fondamentale de la proportionalité des côtés aux sinus des angles opposés, pour le rayon du cercle circonscrit : car on a

$$BC : AC : AB = \tfrac{1}{2} BC : \tfrac{1}{2} AC : \tfrac{1}{2} AB = \text{sin. A} : \text{sin. B} : \text{sin. C}$$

sinus auxquels on peut substituer ceux des tables.

Donc, l'aire S du triangle ACB, pourra être exprimée par

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots S=\tfrac{1}{4}\left[\frac{a^2}{\text{tang. A}}+\frac{b^2}{\text{tang. B}}+\frac{c^2}{\text{tang. C}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}\left[\frac{a^2\,\text{tang. B tang. C}+b^2\,\text{tang. A tang. C}+c^2\,\text{tang. A tang. B}}{\text{tang. A. tang. B. tang. C}}\right]$$

ou par

$$S=\frac{r}{2}\left[a\cos. A+b\cos. B+c\cos. C\right]\ldots\ (2)$$

De la seconde, on tire cette valeur de r, savoir :

$$r=\frac{2S}{a\cos. A+b\cos. B+c\cos. C}\ldots\ldots\ (3)$$

sur laquelle nous reviendrons.

On sait que *dans tout quadrilatère inscrit* ACBD (*fig.* 15), *le rectangle des diagonales, est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.* On a donc

$$AB\times CD=AC\times BD+AD\times BC$$

or, $CD=2r$, et les triangles rectangles BDC et DAC donnent $BD=\sqrt{4r^2-\overline{CB}^2}=\sqrt{4r^2-a^2}$, $AD=\sqrt{4r^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{4r^2-b^2}$; conséquemment la formule précédente devient

$$2cr=b\sqrt{4r^2-a^2}+a\sqrt{4r^2-b^2}$$

d'où l'on tire cette autre expression du rayon du cercle circonscrit au triangle, savoir :

$$r=\frac{b}{2c}\sqrt{4r^2-a^2}+\frac{a}{2c}\sqrt{4r^2-b^2}\ \ldots\ (3')$$

On en déduit encore

$$c=\frac{a}{2r}\sqrt{4r^2-b^2}+\frac{b}{2c}\sqrt{4r^2-a^2}:$$

mais à cause de $a=CB=2\sin. A$, $b=CA=2\sin. B$, $c=AB=2\sin. C=2\sin.(A+B)$, la formule précédente devient, après la division par 2,

$$\sin.(A+B)=\frac{\sin. A}{r}\sqrt{r^2-\sin.^2 B}+\frac{\sin. B}{r}\sqrt{r^2-\sin.^2 A}$$

et, en vertu des relations $r^2 - \sin.^2 B = \cos.^2 B$, $r^2 - \sin.^2 A = \cos.^2 A$, cette formule se transforme dans la suivante

$$\sin.(A+B) = \frac{\sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A}{r}$$

De la formule (3′), on tirerait

$$(*) \quad a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}$$

qui fournirait celle-ci

$$\sin.(A-B) = \frac{\sin. A \cos. B - \sin. B \cos. A}{r} \ldots (3'')$$

Dans tout triangle ABC, on a

$$\text{tang.}(A+B+C) = \text{tang.}\, 180^\circ = 0$$

mais de la formule connue

$$\text{tang.}(m+n) = \frac{\text{tang.}\, m + \text{tang.}\, n}{1 - \text{tang.}\, m\, \text{tang.}\, n}$$

on tire facilement

$$\text{tang.}(A+B+C) = \frac{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B + \text{tang}\,C - \text{tang}\,A\,\text{tang}\,B\,\text{tang}\,C}{1 - \text{tang}\,A\,\text{tang}\,B - \text{tang}\,A\,\text{tang}\,C - \text{tang}\,B\,\text{tang}\,C} = 0$$

d'où résulte la suivante

$$\text{tang.}\,A + \text{tang.}\,B + \text{tang.}\,C = \text{tang.}\,A\,\text{tang.}\,B\,\text{tang.}\,C \ldots (4)$$

qui est connue et qui exprime la condition pour que le produit de trois nombres, soit égal à leur somme.

(*) On tomberait sur le résultat

$$a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} \pm \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}$$

qui comprend deux solutions entre lesquelles on doit prendre celle qui répond au signe inférieur. Au reste, cette formule résout la question : *étant données dans un cercle dont le rayon est connu, les cordes de deux arcs, on demande la corde de leur différence,* tandis que la formule (3) répond à l'énoncé où on demanderait *la corde de la somme des deux arcs, étant données les cordes des arcs simples.*

Si l'on désigne par S′ l'aire du cercle circonscrit, par $2\pi'$ sa circonférence, et qu'on pose $\frac{a}{2\pi'}=\alpha$, $\frac{b}{2\pi'}=\beta$, $\frac{c}{2\pi'}$, $=\gamma$, la formule (3) donnera

$$S'=\frac{S}{\alpha\cos.A+\beta\cos.B+\gamma\cos.C}\ldots\ldots (5)\quad (*)$$

ou bien encore, en observant que $a=2r\sin.A$, $b=2r\sin.B$, $c=2r\sin.C$ et $\pi'=r\pi$, π étant la demi-circonférence du rayon $=1$, on a

$$S'=\frac{\pi S}{\sin.A\cos.A+\sin.B\cos.B+\sin.C\cos.C}\ldots(5')$$

Soit inscrit (*fig.*16) au même triangle un cercle $tt't''$ ayant son centre en I et pour rayon r', et qu'on pose

$$Bt=Bt''=t,\ Ct=Ct'=t',\ At'=At''=t''$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\sigma,\ \text{d'où } a+b+c=2\sigma\ldots\ldots\ldots (a)$$

on aura

$$2t+2t'+2t''=2\sigma=a+b+c,$$

$$t''=\sigma-t-t'=\sigma-a,\ t=\sigma-t'-t''=\sigma-b,\ t'=\sigma-t-t''=\sigma-c\ldots(a')$$

conséquemment

$$\text{tang.}\,\mathrm{AI}t''=\frac{At''}{r'}=\frac{t''}{r'}=\frac{\sigma-a}{r'};\ \text{tang.}\,\mathrm{BI}t=\frac{Bt}{r'}=\frac{t}{r'}=\frac{\sigma-b}{r'}.$$

$$\text{tang.}\,\mathrm{CI}t'=\frac{Ct'}{r'}=\frac{t'}{r'}=\frac{\sigma-c}{r'}\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

(*) En désignaut par σ' l'aire d'un triangle sphérique dont a, b, c sont les trois côtés, et par f six fois le volume de la pyramide triangulaire formée par les trois rayons de la sphère qui répondent aux trois angles du triangle sphérique, *Lagrange* a donné cette relation

$$\text{tang.}\left(\frac{\sigma'}{2}\right)=\frac{f}{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c}$$

qui a quelqu'analogie de forme avec la relation (5).

mais parce que ces angles sont les moitié des angles $t'It''$, $t''It$ et tIt' dont la somme vaut quatre droits, on aura, en vertu de la relation (4),

$$\frac{\sigma-a}{r'}+\frac{\sigma-b}{r'}+\frac{\sigma-c}{r'}=\frac{\sigma-a}{r'}\cdot\frac{\sigma-b}{r'}\cdot\frac{\sigma-c}{r'}\ldots\ldots (6)$$

d'où l'on tire

$$r'^2\left[\sigma-a+\sigma-b+\sigma-c\right]=(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)$$

et, en réduisant d'après (a),

$$r'=\sqrt{\frac{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)}{\sigma}}\ldots\ldots\ldots (7)$$

On a d'ailleurs

$$S=r'\sigma,\ \text{d'où}\ r'=\frac{S}{\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

divisant l'une par l'autre les relations (3) et (8), il vient

$$\frac{r}{r'}=\frac{2\sigma}{a\cos.A+b\cos.B+c\cos.C}=\frac{a+b+c}{a\cos.A+b\cos.B+c\cos.C}\ldots (9)$$

Si dans la première équation (8), on substitue pour r' sa valeur (7), on retombe sur la relation connue

$$S=\sqrt{\sigma(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)}\ldots\ldots\ldots (10)$$

On a

$$\overline{AI}^2=\overline{It''}^2+\overline{At''}^2=r'^2+t''^2$$

écrivant pour t'' la première des valeurs (a'), et pour r' sa valeur (7), on trouvera, après des réductions bien simples,

on aurait de même

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AI}^2=\dfrac{bc(\sigma-a)}{\sigma}\\[2ex]\overline{BI}^2=\dfrac{ac(\sigma-b)}{\sigma}\\[2ex]\overline{CI}^2=\dfrac{ab(\sigma-c)}{\sigma}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Si l'on prolonge (*fig.* 17) les côtés AB, BC, CA du triangle, de part et d'autre indéfiniment, on aura trois espaces indéfinis dans chacun desquels on pourra inscrire un cercle touchant un des

côtés du triangle ABC et les prolongemens des deux autres côtés. Il restera trois autres espaces formés par les prolongemens de deux côtés, dans lesquels on pourrait inscrire des cercles; mais nous ne les considérerons pas ici.

Pour trouver les centres des trois cercles en question, on divisera également les angles CAW et ACX, BAY et ABZ, UBX et BCV, par des droites dont les rencontres donneront les centres M, N et L des cercles extérieurement inscrits. Les rayons seront les perpendiculaires abaissées de ces centres sur l'un des trois côtés touchés. Les droites AM et AN, BN et BL, CL et CM ne feront que les trois droites MN, NL et LM qui formeront le triangle rectiligne MNL dont les trois côtés passeront par les sommets du triangle primitif ABC. Il est facile de prouver 1.° que les droites qui divisent également les angles en A, en B et C du triangle ABC, doivent passer par les centres I et L, I et M, I et N; 2.° que les côtés MN, NL et LM sont perpendiculaires aux droites AIL, BIM et CIN. Ces préliminaires posés, et R, S et T; Q, P et O; H, G et K étant les points dans lesquels les cercles extérieurement inscrits touchent un des côtés et les prolongemens des côtés du triangle primitif, on aura ces égalités

$$BR+BT=2BR=2BT=BA+BC+AR+CT=BA+BC+AS+CS$$
$$=BA+BC+AC=2\sigma;$$

d'où

$$BR=BT=\sigma,\ AH=AK=\sigma,\ CO=CQ=\sigma\ldots\ (c)$$

En rapprochant les égalités (a') et (c), on trouve

$$\sigma-a=At''=CO-a=BO=BP;$$

d'ailleurs, et en vertu des mêmes égalités, on a

$$CS=CT=b-AS=b-AR=b-(BR-BA)=b-(\sigma-c)$$
$$=b-Ct'=At'=At''=\sigma-a.$$

Donc

$$At'=At''=BO=BP=CS=CT=\sigma-a$$

on trouve de même

$$Bt=Bt''=AP=AQ=CG=CK=\sigma-b$$
$$Ct=Ct'=AR=AS=BG=BH=\sigma-c$$

$\ldots\ (d)$

Les triangles semblables BRM et $Bt''I$ donnent la proportion

$$Bt'' : t''I = BR : RM$$

les triangles $At''I$ et AMR semblables, parce qu'ils sont rectangles et qu'ils ont l'angle $t''AI = AMR$, comme formés par des côtés perpendiculaires, donnent

$$t''I : At'' = RA : RM;$$

multipliant ces deux proportions par ordre, il vient

$$Bt'' : At'' = BR \times RA : \overline{RM}^2$$

c'est-à-dire, d'après les valeurs (c) et (d),

$$\sigma - b : \sigma - a = \sigma(\sigma - c) : \overline{RM}^2$$

d'où l'on tire

$$\overline{MR}^2 = \overline{MT}^2 = \frac{\sigma(\sigma - a)(\sigma - c)}{\sigma - b}$$

On trouverait également

$$\overline{LH}^2 = \overline{LK}^2 = \frac{\sigma(\sigma - b)(\sigma - c)}{\sigma - a} \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\overline{NQ}^2 = \overline{NO}^2 = \frac{\sigma(\sigma - a)(\sigma - b)}{\sigma - c}$$

On a d'ailleurs, en vertu de (7),

$$r'^2 = \frac{(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Multipliant entre elles les relations (12) et (7), et extrayant la racine, on obtiendra

$$MT \times LK \times NO \times r' = \sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c);$$

et, d'après (10), en posant $MT = MR = R$, $LH = LK = R'$, $NO = NQ = R''$,

$$S = \sqrt{MT \times LK \times NO \times r'} = \sqrt{R.R'.R''.r'} \ldots (13)$$

En rapprochant les formules (12) de la formule (7), on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\frac{R^2}{r'^2}=\frac{\sigma^2}{(\sigma-b)^2}\\ \frac{R'^2}{r'^2}=\frac{\sigma^2}{(\sigma-a)^2}\\ \frac{R''^2}{r'^2}=\frac{\sigma^2}{(\sigma-c)^2}\end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l|l}\frac{R}{r'}=\frac{\sigma}{\sigma-b} & \frac{R}{R'}=\frac{\sigma-a}{\sigma-b}\\ \frac{R'}{r'}=\frac{\sigma}{\sigma-a} & \frac{R}{R''}=\frac{\sigma-c}{\sigma-b}\\ \frac{R''}{r'}=\frac{\sigma}{\sigma-c} & \frac{R'}{R''}=\frac{\sigma-c}{\sigma-a}\end{array}\right\}\ldots(13')$$

Si de ces équations on tire

$$\sigma-a=\frac{\sigma r'}{R'},\ \sigma-b=\frac{\sigma r'}{R},\ \sigma-c=\frac{\sigma r'}{R''}\ \ldots\ (13'')$$

et qu'on remplace dans les seconds membres, σ par sa valeur tirée de (8), on tombera sur ces expressions

$$\sigma-a=\frac{S}{R'},\ \sigma-b=\frac{S}{R},\ \sigma-c=\frac{S}{R''}\ldots\ (14)$$

d'où on déduit

$$(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)=\frac{S^3}{R.R'.R''}\ldots\ldots\ (15)$$

Les triangles semblables $At'I$ et AKL donnent cette proportion

$$At':AI=AK:AL\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (e)$$

Des triangles semblables ABL et AIC (*Voyez* la note I.re à la fin de l'article), on tire celle-ci

$$AI:AC=AB:AL$$

multipliant par ordre et réduisant, on trouve

$$At':AC=AB\times AK:\overline{AL}^2$$

c'est-à-dire

$$\sigma-a:b=c\sigma:\overline{AL}^2$$

On a donc, en recourant aux équations (13″)

Et de même

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AL}^2=\frac{bc\sigma}{\sigma-a}=\frac{R'}{r'}\cdot bc\\ \overline{BM}^2=\frac{ac\sigma}{\sigma-b}=\frac{R}{r'}\cdot ac\\ \overline{CN}^2=\frac{ab\sigma}{\sigma-c}=\frac{R''}{r'}\cdot ab\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

On tire de ces formules 1.°

$$AL \times BM \times CN = \frac{abc}{r'}\sqrt{\frac{R.R'.R''}{r'}} \ldots (16')$$

2.° en vertu des équations (8), (15) et (7),

$$\overline{AL}^2 \times \overline{BM}^2 \times \overline{CN}^2 = \frac{R.R'.R''}{r'^3}a^2b^2c^2 = \frac{\sigma^3}{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)} \times a^2b^2c^2$$

$$= \frac{\sigma^3}{\sigma r'^2}a^2b^2c^2 = \frac{\sigma^2}{r'^2}a^2b^2c^2$$

et partant

$$AL \times BM \times CN = \frac{\sigma.abc}{r'} = \frac{\sigma^2.abc}{S} \ldots (16'')$$

Les triangles semblables AQN et ASM, comme ayant chacun un angle droit, et l'angle QAN = MAS, donnent

$$AQ : AN = AS : AM;$$

les triangles BAN et NAC semblables, comme ayant l'angle NAB = MAC, et l'angle AMC = NBA (*) donnent

$$AN : AB = AC : AM;$$

multipliant par ordre et reduisant, il vient

$$AQ : AB = AS \times AC : \overline{AM}^2$$

on a donc, d'après (c) et (d),

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM}^2 = \frac{bc(\sigma-c)}{\sigma-b} \\ \text{on trouve pareillement} \\ \overline{AN}^2 = \frac{bc(\sigma-b)}{\sigma-c} \\ \overline{BN}^2 = \frac{ac(\sigma-a)}{\sigma-c} \\ \overline{BL}^2 = \frac{ac(\sigma-c)}{\sigma-a} \\ \overline{CL}^2 = \frac{ab(\sigma-b)}{\sigma-a} \\ \overline{CM}^2 = \frac{ab(\sigma-a)}{\sigma-b} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} AM \times AN = bc \\ \\ BN \times BL = ac \\ \\ CL \times CM = ab \end{array}\right\} \ldots (17)$$

(*) *Voyez* la note II.me à la suite de l'article.

et conséquemment

$$AM \times AN \times BN \times BL \times CL \times CM = a^2b^2c^2 \ldots \quad (18)$$

D'après un théorème de *Bernoulli*, on a

$$NA \times MC \times BL = MA \times LC \times BN;$$

donc, en vertu de l'égalité (18),

$$NA \times MC \times BL = MA \times LC \times BN = abc = AB \times BC \times AC \ldots \quad (19)$$

Des valeurs (17) on tire celle-ci

$$\left.\begin{aligned} MN &= \sqrt{abc}\sqrt{\frac{a}{(\sigma-b)(\sigma-c)}} \\ NL &= \sqrt{abc}\sqrt{\frac{b}{(\sigma-a)(\sigma-c)}} \\ ML &= \sqrt{abc}\sqrt{\frac{c}{(\sigma-a)(\sigma-b)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (20)$$

et, d'après (15),

$$(21)\ldots \quad MN \times NL \times ML = \frac{(abc)^2}{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)} = \frac{a^2b^2c^2 \times RR'R''}{S^3}$$

d'où on peut dégager S. On a encore

$$(22)\ldots \quad MN + NL + ML = \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)}}\left[\sqrt{a(\sigma-a)} + \sqrt{b(\sigma-b)} + \sqrt{c(\sigma-c)}\right]$$

qu'on pourrait énoncer de diverses manières.

Les formules (11) reviennent à celles-ci

$$\left.\begin{aligned} AI &= \sqrt{abc} \times \sqrt{\frac{\sigma-a}{a\sigma}} \\ BI &= \sqrt{abc} \times \sqrt{\frac{\sigma-b}{b\sigma}} \\ CI &= \sqrt{abc} \times \sqrt{\frac{\sigma-c}{c\sigma}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Si l'on observe que IA, IB et IC sont les hauteurs des triangles NIM, NIL et MIL dont les formules (20) donnent les bases, on aura

$$\text{T.MIN} = \tfrac{1}{2}abc\sqrt{\frac{\sigma - a}{\sigma(\sigma - b)(\sigma - c)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}abc(\sigma - a)\sqrt{\frac{1}{\sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}}$$

et enfin (10)

$$\text{T.MIN} = \tfrac{1}{2}\frac{abc(\sigma - a)}{S}$$

on aurait de même

$$\left.\begin{array}{l} \text{T.MIN} = \tfrac{1}{2}\dfrac{abc(\sigma - a)}{S} \\ \text{T.NIL} = \tfrac{1}{2}\dfrac{abc(\sigma - b)}{S} \\ \text{T.MIL} = \tfrac{1}{2}\dfrac{abc(\sigma - c)}{S} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (22)$$

Donc

$$\text{T.MNL} = S' = \tfrac{1}{2}\frac{abc}{S}[(\sigma - a) + (\sigma - b) + (\sigma - c)]$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{abc}{S}(a + b + c) \ldots\ldots\ldots (23)$$

d'après (8); d'où

$$S \times S' = \tfrac{1}{4}abc(a + b + c) = \tfrac{1}{2}abc\sigma \ldots (24)$$

Dans le triangle rectangle ICL, on a

$$\overline{IL}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{CL}^2 = ab\left[\frac{\sigma - c}{\sigma} + \frac{\sigma - b}{\sigma - a}\right]$$

c'est-à-dire, en vertu des valeurs (8) et (14),

$$\overline{IL}^2 = ab\left[\frac{r'}{R''} + \frac{R'}{R}\right]$$

on aurait de même

$$\left.\begin{array}{l} \overline{IL}^2 = ab\left[\dfrac{r'}{R''} + \dfrac{R'}{R}\right] \\ \overline{IN}^2 = ac\left[\dfrac{r'}{R} + \dfrac{R''}{R'}\right] \\ \overline{IM}^2 = bc\left[\dfrac{r'}{R'} + \dfrac{R}{R''}\right] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (25)$$

formules qui peuvent avoir quelques applications.

Si l'on désigne par R''' le rayon du cercle inscrit au grand

triangle MLN, on aura

$$R''' = \frac{2S'}{MN + NL + ML}$$

or, d'après les formules (20), on a

$$\left.\begin{aligned} MN + NL + ML &= \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}} \times \\ &\left[\sqrt{a(\sigma - a)} + \sqrt{b(\sigma - b)} + \sqrt{c(\sigma - c)}\right] \\ &= \frac{\sqrt{abc\sigma}}{S}\left[\sqrt{a(\sigma - a)} + \sqrt{b(\sigma - b)} + \sqrt{c(\sigma - c)}\right] \end{aligned}\right\} \ldots (26)$$

en tenant compte de la relation (10) : cette valeur portée dans R''', donne

$$R''' = \frac{2SS'}{\sqrt{abc\sigma}\left[\sqrt{a(\sigma - a)} + \sqrt{b(\sigma - b)} + \sqrt{c(\sigma - c)}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{abc\sigma}}{\sqrt{a(\sigma - a)} + \sqrt{b(\sigma - b)} + \sqrt{c(\sigma - c)}} \ldots (27)$$

en vertu de la relation (24).

La considération des triangles rectangles IAt'' et BIt'', donne, d'après (a') et (13'),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}A}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}B} = \frac{Bt''}{At''} = \frac{\sigma - b}{\sigma - a} = \frac{R'}{R} \\ &\text{on a de même} \\ &\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}A}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}C} = \frac{\sigma - c}{\sigma - a} = \frac{R'}{R''};\ \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}B}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}C} = \frac{\sigma - c}{\sigma - b} = \frac{R}{R''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (28)$$

Ces formules serviraient à traduire plusieurs des précédentes en tang. $\frac{1}{2}$A, tang. $\frac{1}{2}$B et tang. $\frac{1}{2}$C, ce qui pourrait donner lieu à des transformations utiles. On en tire cette suite de rapports

$$R : R' : R'' = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}B : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C \ldots (29)$$

Il est essentiel de lier toutes les données de la question, a, b, c, r, r', R, R', R'', S et S', par une même formule. A cet effet, on reprendra la relation (3) dans laquelle on écrira pour cos. A, cos. B et cos. C leurs valeurs connues, et en recourant aux rela-

tions (7), on aura

$$\cos. A = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2\sigma(\sigma-a)}{bc} = \frac{2\sigma S}{bcR'}$$

$$\cos. B = \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{2ac} = \frac{2\sigma(\sigma-b)}{ac} = \frac{2\sigma S}{acR}$$

$$\cos. C = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} = \frac{2\sigma(\sigma-c)}{ab} = \frac{2\sigma S}{abR''}$$

la formule citée deviendra donc

$$r = \frac{2S}{\frac{2a\sigma S}{bcR'} + \frac{2b\sigma S}{acR} + \frac{2c\sigma S}{abR''}} = \frac{1}{\sigma\left(\frac{a}{bcR'} + \frac{b}{acR} + \frac{c}{abR''}\right)}$$

remplaçant σ par sa valeur $\frac{S}{r'}$ tirée de (8), on aura

$$r = \frac{r'}{S\left(\frac{a}{bcR'} + \frac{b}{acR} + \frac{c}{abR''}\right)}$$

mais à cause de $\frac{S}{\sigma} = r'$, on a (for. 23) $bc = \frac{2r'S'}{a}$, $ac = \frac{2r'S'}{b}$, $ab = \frac{2r'S'}{c}$; donc

$$r = \frac{r'}{\frac{S}{2r'S'}\left(\frac{a^2}{R'} + \frac{b^2}{R} + \frac{c^2}{R''}\right)}$$

ou

$$r = \frac{2r'^2S'}{S\left(\frac{a^2}{R'} + \frac{b^2}{R} + \frac{c^2}{R''}\right)}$$

et enfin

$$r = \frac{S'}{S} \times \frac{2r'^2}{\frac{a^2}{R'} + \frac{b^2}{R} + \frac{c^2}{R''}} \qquad (30)$$

formule très-simple par laquelle nous terminerons ces recherches.

J. G. G.

NOTE I.re, PAG. 187.

Si sur NL, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, elle passera par les sommets A et C des angles droits NAL et NCL, et partant les angles ACN et ALN seront égaux, comme ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ arc AN. On sait d'ailleurs que l'angle CAI = BAL, comme moitié du même angle CAB.

NOTE II.me, PAG. 188.

Si sur ML, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, elle passera par les pieds A et B des perpendiculaires LA et MB, et on aura l'angle AML = AMC = $\frac{\text{arc. AB} + \text{arc. BL}}{2}$ = angle NBA : on sait d'ailleurs que l'angle BAN complément de BAL, est égal à l'angle CAM complément de CAL = BAL.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

On demande de placer une courbe du second degré connue, sur un cône droit de dimension donnée; en d'autres termes, *de fixer la position que doit avoir un plan par rapport à un cône droit, pour que la courbe d'intersection qui en résulte, soit une courbe du second degré dont l'équation particulière est donnée* (*).

L'équation générale des sections coniques, est la suivante (**)

$$y^2 = \frac{\sin. \alpha}{\cos.^2 \frac{1}{2} \beta} [ax \sin. \beta - x^2 \sin. (\alpha + \beta)] \ldots (1)$$

(*) Cette question est du nombre de celles qui ont été proposées dans les *Collèges Royaux* de Paris : la solution que nous rapportons ici et qui a été publiée dans le temps, mérite d'être connue, à cause de la discussion très-étendue à laquelle elle donne lieu.

(**) *Voyez* les Traités modernes d'application et la 4.e partie de la 2.me édition de mes *Elementa*.

J. G. G.

dans laquelle $a = \text{SO}$, β représente l'angle ASB au sommet du cône droit, α l'angle SOO′ entre les intersections SO et OO′ du cône et de la section, par le plan mené par l'axe SC (*fig.* 18). L'origine des coordonnées étant prise en O, on a $\text{OP} = x$ et $\text{PM} = y$. On démontre dans les traités d'application, que la section est *une ellipse*, toutes les fois que le coefficient constant $-\frac{\sin.\alpha \sin.(\alpha + \beta)}{\cos.^2 \frac{1}{2}\beta}$ est négatif; *une parabole*, si ce coefficient est nul; et *une hyperbole*, lorsqu'il est positif : c'est ce qui résulte d'ailleurs de la comparaison de l'équation (1) avec celle-ci

$$y^2 = 2px + qx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

qui représente une *ellipse*, une *parabole*, ou une *hyperbole*, suivant que q est négatif, zéro ou positif.

En vertu de l'énoncé, les quantités p et q et l'angle β doivent être regardées comme connues, puisqu'on donne la courbe et la dimension du cône droit dont elle doit être une section; et il s'agit de déterminer les quantités a et α de manière que les équations (1) et (2) soient identiques.

Or, si l'on développe l'équation (1), et qu'on égale respectivement les coefficiens de x et x^2 dans (1) et (2), on aura ces conditions

$$a \sin.\alpha \sin.\beta = 2p \cos.^2 \tfrac{1}{2}\beta \ldots\ldots\ldots, \quad (3)$$

$$\sin.\alpha \sin.(\alpha + \beta) = -q \cos.^2 \tfrac{1}{2}\beta \ldots\ldots \quad (4)$$

Comme la dernière ne renferme que l'inconnue α, elle peut servir à la déterminer : après quoi, l'équation (3) fera connaître a. Or, pour dégager α, nous aurons recours à l'artifice suivant. De la formule trigonométrique

$$\cos.(m - n) - \cos.(m + n) = 2 \sin.m \sin.n$$

on déduit

$$\sin.m \sin.n = \frac{\cos.(m-n) - \cos.(m+n)}{2}$$

et posant $m = \alpha + \beta$, $n = \alpha$, on obtient

$$\sin.\alpha \sin.(\alpha + \beta) = \frac{\cos.\beta - \cos.(2\alpha + \beta)}{2};$$

donc l'équation (4) devient

$$\frac{\cos.\,\beta - \cos.\,(2\alpha + \beta)}{2} = -q\,\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta$$

d'où

$$\cos.\,(2\alpha + \beta) = \cos.\,\beta + 2q\,\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta \ldots\ldots\ (5)$$

Telle est l'équation propre à faire connaître l'angle α qu'on obtiendra après avoir retranché l'angle donné β de l'angle $2\alpha + \beta$, et divisé le reste par 2.

Mais pour que l'angle $2\alpha + \beta$ puisse être assigné, il faut que la valeur trouvée pour $\cos.\,(2\alpha + \beta)$ soit comprise entre les limites $+1$ et -1 : on doit donc avoir les conditions

$$\cos.\,\beta + 2q\,\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta = \text{ou} > -1 \quad \text{et} \quad = \text{ou} < +1 :$$

comme d'ailleurs on a $\cos.\,\beta = \cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta - \sin.^2\,\tfrac{1}{2}\beta$, ces conditions peuvent se transformer dans les deux suivantes

$$\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta - \sin.^2\,\tfrac{1}{2}\beta + 2q\,\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta = \text{ou} > -1, \text{ et } = \text{ou} < +1$$

ou bien, à cause de $\cos.^2\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{1}{1 + \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta}$, $\sin.^2\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta}{1 + \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta}$, on doit avoir

$$1 - \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta + 2q = \text{ou} > -1 - \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta, \text{et} = \text{ou} < +1 + \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta$$

La première se réduit évidemment à

$$q = \text{ou} > -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

et la seconde à

$$q = \text{ou} < \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta, \text{ ou tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta > \text{ou} = q \ldots\ (7)$$

Cela posé, examinons successivement les différens cas qui peuvent se présenter, en commençant par le plus simple :

1.° Si la courbe est une parabole, on a $q = 0$; et comme on a d'ailleurs $0 > -1$ et $\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\beta > 0$, les conditions (6) et (7) sont satisfaites.

Donc, *sur un cône droit de dimension donnée, il est toujours possible de placer une parabole quelconque dont le paramètre est connu.*

Dans ce cas, l'équation (4) donne

$$\sin.\,\alpha\,\sin.\,(\alpha + \beta) = 0;$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes de α, savoir :

$\alpha = 0$, $\alpha = 200^g$, $\alpha = -\beta$, et $\alpha + \beta = 200^g$ d'où $\alpha = 200^g - \beta$

dans la division centésimale. On conclut des deux derniers résultats que le plan de la section est mené, par exemple, ou par le point O' parallèlement à SA, ou par le point O parallèlement à SB.

2.° Supposons que la courbe donnée soit une ellipse. On a dans ce cas, $q = -\frac{B^2}{A^2}$, B étant, comme on le sait, essentiellement moindre que A. Ainsi les deux conditions (6) et (7), savoir :

$$-\frac{B^2}{A^2} > -1 ; \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\beta > -\frac{B^2}{A^2}$$

sont remplies.

Donc *toute ellipse, quelque petites ou quelque grandes que soient ses dimensions, peut être placée sur un cône droit de dimension donnée.*

3.° Enfin si la courbe est une hyperbole, auquel cas on a $q = +\frac{B^2}{A^2}$, la condition (6) est satisfaite. Examinons la seconde qui revient à

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\beta = \text{ou} > \frac{B^2}{A^2},$$

soit θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole donnée : on sait que tang. $\frac{1}{2}\theta = \frac{B}{A}$: donc la condition dernière se traduit dans celle-ci

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\beta = \text{ou} > \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\theta, \text{ d'où } \beta = \text{ou} > \theta$$

Ainsi *pour qu'une hyperbole dont on a l'équation, puisse être placée sur un cône droit de dimension connue, il faut que l'angle au centre du cône soit, au moins, égal à l'angle que forment entre elles les deux asymptotes de la courbe que l'on considère.*

Cette circonstance peut s'expliquer par la Géométrie. Concevons que, dans un cône droit, on ait mené un premier système de plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe SC : ces plans donnent lieu à une suite *d'hyperboles semblables* (*) et dont les asymptotes

(*) Les ellipses et les hyperboles qu'on obtient en coupant un cône par une

forment entre elles le même angle. L'un de ces plans, passant par l'axe lui-même, détermine sur la surface deux génératrices dont l'angle est égal à celui des asymptotes dont nous venons de parler, puisque cet angle n'est autre que β.

Imaginons maintenant un second système de plans aussi parallèles entre eux, mais non parallèles à l'axe, et qui cependant donnent encore lieu a des hyperboles, s'ils rencontrent les cônes opposés au sommet : l'angle des asymptotes de toutes ces hyperboles, est constant et égal à celui des deux génératrices, déterminé par celui des plans de ce système, mené par le sommet. Cela posé, observons que, dans l'angle trièdre formé par ces dernières génératrices et l'axe du cône, l'angle des génératrices est nécessairement moindre que la somme des deux autres angles dièdres : or comme chacun de

---

suite de plans parallèles, sont semblables. En effet, la comparaison des équations (1) et (2), donne

$$\frac{\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.^2\frac{1}{2}\beta}=q=\mp\frac{B^2}{A^2}$$

suivant que la courbe est une ellipse ou une hyperbole; or, tant que le plan sécant reste parallèle à lui-même, l'angle α ne change pas; d'ailleurs l'angle β est constant et donné *à priori ;* donc le rapport $\frac{B}{A}$ est lui-même constant pour toutes ces ellipses ou ces hyperboles; en sorte qu'on peut y changer B en nB et A en nA; et c'est précisément en cela que consiste la similitude. Quant aux paraboles, les plans qui les produisent, sont nécessairement parallèles entre eux, ce qui peut servir à confirmer que deux paraboles quelconques sont toujours semblables, comme on le conclut encore de la comparaison des équations (1) et (2), qui, pour $q=0$, donne

$$\frac{a\sin.\alpha\sin.\beta}{\cos.^2\frac{1}{2}\beta}=2p;$$

en sorte que les paramètres proportionnels aux longueurs a, sont proportionnels entre eux : on démontre d'ailleurs que *les élémens homologues de deux paraboles quelconques, sont dans le rapport de leurs paramètres,* si ces élémens sont linéaires, *et dans le rapport des carrés de ces mêmes paramètres,* si l'on considère des élémens de superficie.

J. G. G.

ces derniers angles est $\frac{1}{2}$ 𝔊, il s'ensuit que le premier est moindre que 𝔊. Donc l'angle des asymptotes relatives au second système, est moindre que l'angle des asymptotes relatives au premier.

En d'autres termes, le *maximum* des angles que forment entre elles les asymptotes de toutes les hyperboles qu'on peut obtenir sur la surface d'un cône droit, est celui de deux génératrices opposées, ou bien l'angle au centre du cône. *Il n'est donc pas possible de placer sur un cône droit, une hyperbole dont les asymptotes font un angle plus grand que l'angle au centre du cône.*

Mais comme, dans les équations (3) et (4), l'angle 𝔊 peut être pris arbitrairement, il n'en est pas moins démontré *que toute courbe du second degré dont l'équation est connue, peut s'obtenir au moyen de l'intersection d'un plan et d'un cône droit de dimension convenable.*

(*Art. extr.*) J. G. G.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE.

Suite de l'article de M. Noël, *professeur des Sciences Physiques et Mathématiques, principal de l'Athénée de Luxemboug.* (Corresp. n.° III, pag. 124 et suiv.)

Ce principe va maintenant nous servir pour résoudre quelques problèmes de Géomètrie et de Mécanique.

6. *Une quantité géométrique* G *donnée, figure plane ou corps, est telle que sa base* b *et toutes les sections parallèles sont entre elles comme les puissances* m *ièmes de leurs distances au sommet* S : *trouver la mesure de cette quantité géométrique, ainsi que la distance*

x de son centre de gravité à la droite ou au plan P, *qu'on mène par le sommet* S *parallèlement à la base* b.

Menons du sommet S sur la base b, la perpendiculaire h : divisons cette perpendiculaire en un très-grand nombre n de parties égales à u, de manière que $h=nu$, et que u puisse être supposée infiniment petite : par chaque point de division de h, menons une droite ou un plan parallèle à la base b ; nous partagerons ainsi G en n tranches de même épaisseur u. Il est clair que les bases b' et b'' de la v ième de ces tranches, à partir de S, sont éloignées de P des distances $u(v-1)$ et uv : donc on aura, d'après l'énoncé, $b : b'' :: h^m : u^m v^m$; d'ou l'on tire

$$b''=\frac{b}{h^m}u^m v^m. \text{ De même; } b'=\frac{b}{h^m}u^m(v-1)^m.$$

Désignons par t' et t'', soit deux parallélogrammes, soit deux prismes ou cylindres de même hauteur u que la v ième tranche t, et ayant respectivement b' et b'' pour bases : on aura donc $t'=b'u$ et $t''=b''u$. Il est clair que t' est intérieur et t'' extérieur à t; donc $t'<t$ et $t<t''$. Par conséquent, la quantité k dont t est surpassé par t'', est moindre que la quantité dont t'' surpasse t', c'est-à-dire qu'on a.

$$k<t''-t' \text{ et } t=t''-k=t''-<(t''-t');$$

d'où résulte

$$t=b''u-<u(b''-b').$$

Substituant les valeurs de b' et b'', on trouve

$$t=\frac{b}{h^m}u^{m+1}v^m-<\frac{b}{h^m}u^{m+1}[v^m-(v-1)^m].$$

Développant $(v-1)^m$ par la formule du binome, puis soustrayant et réduisant, on verra que $m-1$ est le plus haut exposant de v dans les termes entre crochets carrés; l'exposant $m+1$ de u, y surpasse donc de plusieurs unités celui de v; par conséquent, comme la variable u peut être supposée infiniment petite, tous ces termes disparaîtront du résultat final, et doivent d'abord être négligés (n.° précéd. art. 5). On a donc simplement

$$t=\frac{b}{h^m}u^{m+1}v^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et on voit que cela revient à considérer la v ième tranche t comme un parallélogramme, un prisme ou un cylindre; ce qui est permis, puisque cette tranche est infiniment mince.

Le centre de gravité de la v ième tranche t, étant nécessairement dans son intérieur, sa distance à la droite ou plan P des momens, est $uv - {<} u$. Or, le moment de la v ième tranche t, par rapport à P, est le produit de la valeur (1) de t par la distance $uv - {<} u$: donc en effectuant la multiplication et rejetant les termes où l'exposant de u surpasse de deux unités celui de v, termes qui doivent disparaître dans le résultat final (art. 5), on aura, pour le moment de la v ième tranche,

$$\frac{b}{h^m}\, u^{m+2} v^{m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Prenons successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, dans (1) et (2), puis ajoutons entre eux les n résultats fournis par chaque expression; la première somme sera celle des mesures de toutes les tranches qui composent la quantité géométrique G, et sera la mesure de G. Quant à la seconde somme, elle sera celle des momens de toutes les tranches de G; elle sera donc le moment Gx de G. Ainsi, à cause de $h = nu$ et de la variable u infiniment petite, les termes $u^{m+1} v^m$ et $u^{m+2} v^{m+1}$ deviennent respectivement $\frac{h^{m+1}}{m+1}$ et $\frac{h^{m+2}}{m+2}$ (art. 5); on a par conséquent

$$G = \frac{bh}{m+1} \text{ et } Gx = \frac{bh^2}{m+2}; \text{ d'où } x = \frac{(m+1)h}{m+2}.$$

7. Ces formules auront lieu lorsque t' et t'' seront des parallélogrammes, des parallélipipèdes, des prismes ou des cylindres. Ainsi la formule $G = \frac{bh}{m+1}$ fournit les conséquences que voici :

1.° Si la quantité géométrique G est un triangle dont b soit la base et h la hauteur, la base b et les sections parallèles seront entre elles comme leurs distances au sommet S; on aura donc $m = 1$ et $G = \frac{1}{2} bh$.

2.° Si G désigne le segment SDMN de parabole (*fig.* 19), la base $MN = b$ et les sections parallèles seront entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet S; ainsi on aura $m = 2$ et $G = \frac{1}{3} bh$;

c'est-à-dire que $SDMN = \frac{1}{3} MN \times NS$. Le segment SDMN est donc le tiers du rectangle SPMN; par conséquent le segment SDMP est les deux-tiers du même rectangle.

3.° Si G est un prisme triangulaire dont S soit le sommet d'un angle solide, et b la face latérale opposée : cette face et les sections parallèles seront proportionnelles à leurs distances au sommet S; donc $m = 1$ et $G = \frac{1}{2} bh$.

4.° Lorsque G est une pyramide quelconque, ou un cône droit ou oblique, S est le sommet, h la hauteur et b la base. Or, cette base et les sections parallèles sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet S; on a donc $m = 2$ et $G = \frac{1}{3} bh$.

5.° Pour le *paraboloïde autour de l'axe des abscisses,* décrit par le segment SDMP autour de SP, la base b décrite par PM, et les sections parallèles, sont comme leurs distances au sommet S; donc $m = 1$ et $G = \frac{1}{2} bh$.

6.° Pour le *paraboloïde autour de l'axe des ordonnées,* décrit par le segment SDMN autour de SN, la base b décrite par MN, et les sections parallèles sont comme les puissances 4.mes de leurs distances au sommet S; donc $m = 4$ et $G = \frac{1}{5} bh$.

8. On tire de la formule $x = \frac{(m+1)h}{m+2}$ les neuf conséquences qui suivent :

1.° Si G est un parallélogramme ou un parallélipipède, toutes les sections parallèles à la base b, lui sont égales; ainsi b' étant l'une de ces sections et h' sa distance à S, on devrait avoir, d'après l'énoncé, $b : b' :: h^m : h'^m$. Or $b' = b$; donc $h^m = h'^m$; mais $h' < h$; on ne peut donc avoir $h'^m = h^m$ que quand $m = 0$, qui donne effectivement $h^m = h'^m = 1$. Prenant donc $m = 0$, il vient $x = \frac{1}{2} h$. Ce qui nous apprend que le centre de gravité d'un parallélogramme ou d'un parallélipipède, est également éloigné de deux bases opposées quelconques : il est par conséquent au milieu d'une diagonale.

2.° Si G est un triangle, on aura $m = 1$ et $x = \frac{2}{3} h$. D'où l'on voit que le centre de gravité d'un triangle, est éloigné de chaque côté, pris pour base, d'une distance égale au tiers de la hauteur; il est donc sur la droite menée du sommet S au milieu de la base b, au tiers de cette droite, à partir de la base b.

3.° Si G est le segment parabolique SDMN, dans lequel SN $=h$, MN $=b$ et $m=2$, on aura $x=\frac{5}{4}h$. D'où il est aisé de conclure, par le principe des momens, que le centre de gravité du segment SDMP est à une distance de SP, égale à $\frac{5}{8}$ MP.

4.° Pour le prisme triangulaire G, on a $m=0$, quand b désigne la base réelle, et $m=1$, quand b désigne une face latérale : donc $x=\frac{1}{2}h$ dans le 1.er cas, et $x=\frac{2}{3}h$ dans le 2.° Ces valeurs prouvent que le centre de gravité d'un prisme triangulaire, est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

5.° Pour le prisme ou le cylindre, on a $m=0$ et $x=\frac{1}{2}h$.

6.° Pour la pyramide triangulaire, $m=2$ et $x=\frac{3}{4}h$. Ainsi le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, est éloigné de chaque face, prise pour base, d'une distance égale au quart de la hauteur ; il est par conséquent sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, et au quart de cette droite, à partir de la base.

7.° Pour une pyramide polygonale, ou un cône, $m=2$ et $x=\frac{3}{4}h$.

8.° Pour le paraboloïde autour de l'axe des abscisses, $m=1$ et $x=\frac{2}{3}h$.

9.° Enfin, pour le paraboloïde autour de l'axe des ordonnées, $m=4$ et $x=\frac{5}{6}h$.

9. *Trouver le volume et le centre de gravité d'un segment d'ellipsoïde, compris entre deux plans perpendiculaires à l'un des axes principaux.*

Les coordonnées étant rectangulaires, l'équation de la surface d'un ellipsoïde, est

$$b^2c^2z^2+a^2c^2y^2+a^2b^2x^2=a^2b^2c^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

équation dans laquelle a, b, c sont les longueurs des trois demi-axes principaux, dirigés respectivement suivant les axes des x, des y et des z, l'origine étant au centre O.

Prenons sur l'axe des z, un point à la distance h de l'origine O : par ce point menons un plan P perpendiculaire à l'axe des z et conséquemment parallèle au plan des xy : divisons h en un nombre infini n de parties égales à u, par des plans parallèles à P ; nous partagerons ainsi le segment ellipsoïdique S, compris

entre P et le plan des xy, en n tranches de même épaisseur u. Soit t la v ième de ces tranches, à partir de O, et b' celle des bases de t la moins voisine de O; b' en sera donc à la distance uv, et pour tous les points de la courbe qui termine b', on aura $z = uv$. L'équation de cette courbe est par conséquent

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}\,(c^2 - u^2v^2).$$

Ainsi la courbe qui termine b' est une ellipse dont les demi-axes sont :

$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - u^2v^2} \text{ et } \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - u^2v^2}.$$

D'où il suit que l'aire de b' a pour expression

$$b' = \frac{\pi ab}{c^2}\,[c^2 - u^2v^2].$$

Pour l'autre base b'' de t, on aura pareillement

$$b'' = \frac{\pi ab}{c^2}\,[c^2 - u^2\,(v - 1)^2].$$

La v ième tranche t peut être considérée comme un corps cylindrique ayant b' pour base et u pour hauteur; car elle ne diffère de ce cylindre que d'une quantité moindre que $b'u - b''u$, ou $\frac{\pi ab}{c^2}\,u^3\,(2v - 1)$, qui s'anéantit dans le résultat final (art. 5) : la v ième tranche est donc égale à $b'u$ ou à

$$\pi abu - \frac{\pi ab}{c^2}\,u^3v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Le centre de gravité de la v ième tranche t, est dans son intérieur, et il est conséquemment à la distance $vu - < u$ du plan des xy, que nous prenons pour celui des momens. Ainsi le moment de cette v ième tranche par rapport au plan des xy, est, en négligeant les termes où l'exposant de u surpasse celui de v de deux unités (art. 5),

$$\pi abu^2v - \frac{\pi ab}{c}\,u^4v^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

D'après l'équation (1), toute droite parallèle au plan de xy;

menée par l'axe des z et terminée de part et d'autre à la surface de l'ellipsoïde, est divisée en deux parties égales par l'axe des z : donc tous les points du segment S sont deux à deux à égales distances et de part et d'autre de l'axe des z; donc le centre de gravité de S est sur cet axe. Soit z' la distance de ce centre au plan des xy; le moment de S, par rapport à ce plan, sera Sz'.

Cela posé, prenons successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, dans les expressions (2) et (3), et ajoutons; à cause de $h = nu$ et de la variable u infiniment petite, qui change u^2v, u^3v^2 et u^4v^3 respectivement en $\frac{1}{2}h^2$, $\frac{1}{3}h^3$ et $\frac{1}{4}h^4$, dans le résultat final (art. 5), on trouvera

$$S = \pi abh - \frac{\pi abh^3}{3c^2}, \text{ et } Sz' = \frac{1}{2}\pi abh^2 - \frac{\pi abh^4}{4c^2},$$

ou

$$S = \frac{\pi abh}{3c^2}(3c^2 - h^2), \text{ et } Sz' = \frac{\pi abh^2}{4c^2}(2c^2 - h^2);$$

d'où l'on tire

$$z' = \frac{3h(2c^2 - h^2)}{4(3c^2 - h^2)}.$$

Lorsque $h = c$, S est le demi-ellipsoïde; il vient donc pour le volume du demi-ellipsoïde et pour la distance de son centre de gravité au centre O,

$$\tfrac{2}{3}\pi abc \text{ et } \tfrac{3}{8}c.$$

Soit h' la hauteur du segment S' qui reste en ôtant le segment S du demi-ellipsoïde $\frac{2}{3}\pi abc$; on aura $h' = c - h$ ou $h = c - h'$, et

$$S' = \tfrac{2}{3}\pi abc - \frac{\pi ab(c - h')}{3c^2}\left[3c^2 - (c - h')^2\right];$$

ce qui donne, en réduisant,

$$S' = \frac{\pi abh'^2}{3c^2}(3c - h').$$

Soit Z la distance du centre de gravité de S' au sommet, extrémité de c; d'après les valeurs précédentes et à l'aide du principe des momens, on trouvera

$$Z = \frac{h'(8c - 3h')}{4(3c - h')},$$

Toutes les valeurs que l'on vient d'obtenir, s'appliquent à l'ellipsoïde de révolution, décrit par une ellipse autour de l'un de ses axes; il suffit de prendre, dans ces valeurs, $b=a$. Alors $2a$ et $2a$ seront les axes de l'ellipse, et $2c$ celui autour duquel elle aura tourné.

Les mêmes valeurs s'appliqueront à la sphère, en y faisant $a=b=c$.

10. Raisonnant et opérant comme dans le précédent numéro, il sera facile de démontrer les théorèmes que voici :

1.° Le centre de gravité du segment parabolique SDMN (*fig.* 19), est éloigné de SN d'une distance égale aux trois dixièmes de MN. D'où il est aisé de conclure, à l'aide du principe des momens, que le centre de gravité du segment SPMD, est à une distance de SN égale à $\frac{5}{6}$ MN.

2.° Le corps décrit par le segment parabolique SDMN autour de MN, est le sixième du cylindre décrit par le rectangle SPMN; et le centre de gravité de ce corps est sur l'axe MN, à une distance de N égale à $\frac{1}{5}$ MN.

3.° Le corps décrit par le segment parabolique SDMP autour de MP, est les huit quinzièmes du cylindre décrit par le rectangle SPMN; et le centre de gravité de ce corps est sur l'axe MN, à une distance de P, égale à $\frac{5}{16}$ MP.

4.° Si on prend sur le prolongement du premier axe 2A d'une hyperbole, un point éloigné du sommet S de la distance h, et que par ce point on mène un parallèle au second axe 2B, le corps V décrit autour de h par le segment compris entre la courbe, la parallèle et la distance h, aura son centre de gravité placé sur h, à une distance x de S, et on trouvera

$$V=\frac{B^2h^2}{A^2}\pi\left(A+\tfrac{1}{5}h\right) \text{ et } x=\frac{h\,(8A+3h)}{4\,(3A+h)}.$$

5.° Si on prend sur le second axe 2B d'une hyperbole, un point éloigné du centre C de la distance d, et que par ce point on mène une parallèle au premier axe 2A, le corps V′ décrit autour de 2B par le segment compris entre la courbe, la parallèle, la distance d et le demi-axe A, aura son centre de gravité sur 2B

et à une distance x' de C; de sorte qu'on obtiendra

$$V'=\frac{A^2d}{B^2}\pi\,(B^2+\tfrac{1}{3}d^2)\ \text{ et }\ x'=\frac{3d\,(2B^2+d^2)}{4\,(3B^2+d^2)}.$$

6.° Si par le centre de la base d'un cylindre droit, on mène un plan incliné à cette base, ce plan retranchera du cylindre un onglet équivalant aux deux-tiers du prisme de même hauteur et ayant pour base le carré du rayon de la base du cylindre.

(La suite dans un prochain n.°)

MÉCANIQUE.

Suite de l'article de M. A. TIMMERMANS, *Docteur en Sciences et professeur de Mathématiques supérieures au Collège Royal de Gand.* (Corresp. n.° III, pag. 132 et suiv.)

Ce que nous venons de voir, concerne seulement les systèmes de forme invariable; passons maintenant à un système de forme variable; on pourra le considérer comme composé d'une aggrégation de systèmes invariables liés entre eux par des agents quelconques, tels que des cordons, etc., destinés à transmettre l'action d'un système invariable à celui qui le suit immédiatement : soient T T' T'' etc. les tensions de ces cordons, P P' P'' etc. $P_{,}\,P'_{,}\,P''_{,}$ etc. $P_{,,}\,P'_{,,}\,P''_{,,}$ etc. les forces du 1.er, 2.me, 3.me etc. système invariable : l'équilibre devant évidemment avoir lieu entre P P' P'' etc. et T, on aura

$$PD'\sin.V+P'D'\sin.V'+\ldots\ldots\ldots+T\delta\sin.\nu=0$$

δ et ν étant pour T des quantités analogues à D et V. De même l'équilibre devant avoir lieu entre T $P_{,}P'_{,}P''_{,}$ et T' qui est la tension du 2.me cordon, on aura

$$T\delta_{,}\sin.\nu_{,}+P_{,}D_{,}\sin.V_{,}+P'_{,}D'_{,}\sin.V'_{,}+\ldots\ldots+T'\delta'_{,}\sin.\nu'_{,}=o$$

et ainsi de suite. Si l'on imprime au 1.er système invariable une vitesse angulaire $d\iota$, et que, par suite de ce dérangement, les autres systèmes reçoivent les vitesses $d\iota'$, $d\iota''$ etc. on aura en multipliant et ajoutant

$$d\iota.PD\sin.V+d\iota.P'D'\sin.V'+\ldots\ldots+T(d\iota.\delta\sin.\nu+d\iota'.\delta_{,}\sin.\nu_{,})$$
$$+d\iota'.P_{,}D_{,}\sin.V_{,}+\ldots\ldots+T'(d\iota'.\delta'_{,}\sin.\nu'_{,}+d\iota''.\delta_{,,}\sin.\nu_{,,})+\text{etc.}=o$$

Pour que les quantités T T' T'' etc. étrangères aux systèmes de forces, disparaissent de l'équation, il faut que $d\iota.\delta\sin.\nu+d\iota'.\delta_{,}\sin.\nu_{,}=o$ $d\iota'.\delta'_{,}\sin.\nu'_{,}+d\iota''.\delta_{,,}\sin.\nu_{,,}=o$, ce qui indique que les liens qui fixent les différens système les uns aux autres, doivent être inextensibles, ou que les fluides qui établissent une communication entre ces systèmes au moyen de canaux, doivent être incompressibles, pour que l'équation des vitesses virtuelles, ait lieu; car, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\delta d\iota$ est l'arc décrit par l'extrémité du lien, et $d\iota.\delta\sin.\nu$ est la projection de cet arc sur le lien, ou son allongement; tandis que $d\iota'.\delta_{,}\sin.\nu_{,}$ est l'allongement du côté opposé.

Si ces facteurs n'étaient pas nuls, il faudrait introduire dans l'équation des vitesses virtuelles, les tensions des ressorts comme forces intégrantes du système. Si l'un des fils passait sur une poulie ou dans un anneau, ou si plusieurs canaux communiquaient entre eux, chaque coefficient ne serait plus nul séparément; mais on devrait avoir

$$T(d\iota.\delta\sin.\nu+d\iota.'\delta'\sin.\nu')+T'(d\iota.'\delta'_{,}\sin.\nu'_{,}+d\iota.''\delta_{,,}\sin.\nu_{,,})=o;$$

car, dans le premier cas $T=T'$, et l'allongement de l'un des fils serait égal à la diminution de l'autre; et, dans le second, les deux pressions seraient entre elles comme les quarrés des diamètres des canaux, qui sont eux mêmes dans le rapport inverse des allongemens infiniment petits de ces canaux.

Dans ce qu'on vient de voir, les vitesses virtuelles, ou plutôt les espaces parcourus par les points d'application des forces en

vertu de ces vitesses, sont supposées infiniment petites; car ce n'est que dans cette supposition qu'on peut, en général, les considérer comme des lignes droites, ainsi que nous l'avons fait; cependant si dans le produit Ddt, D devient infini, il est évident que Ddt deviendra une quantité finie; et comme Ddt est la vitesse virtuelle de P, on voit que les vitesses virtuelles deviendront finies, lorsque D D′ D″ etc. seront infinis; mais comme ces quantités sont les distances des forces à un axe instantané de rotation, il s'en suit que cet axe doit être infiniment éloigné; alors Ddt, D′dt, etc. deviennent des lignes droites égales et parallèles entre elles. On voit donc que, *dans un système de forme invariable, les vitesses virtuelles pourront être finies, pourvu que les points d'application des forces, décrivent des lignes droites qui seront alors égales et parallèles entre elles.*

Si le système était de forme variable, et qu'il se composât d'une aggrégation de plusieurs systèmes de forme invariable, liés entre eux d'une manière quelconque, on ferait voir de la même manière que *les vitesses virtuelles seront finies, si elles sont dirigées suivant des lignes droites qui sont alors égales et parallèles entre elles pour chaque système.* L'inverse de cette proposition n'est pas toujours vraie; mais on verra plus loin l'équation de condition à laquelle sont soumises les forces motrices d'un système, pour que les vitesses virtuelles, d'ailleurs quelconques, soient finies.

L'équation (*Voy.* le 1.er art.)

$$\Pi p + \Pi' p' + \ldots \Pi_{,} p_{,} + \Pi'_{,} p'_{,} + \Pi''_{,} p''_{,} + \text{etc.} = 0$$

devient, à cause de $p = p' = p'' \ldots p_{,} = p'_{,} = p''_{,} \ldots$,

$$p(\Pi + \Pi' + \text{etc.}) + p_{,}(\Pi_{,} + \Pi'_{,} + \text{etc.}) + \text{etc.} = 0$$

c'est-à-dire que *la somme des produits des vitesses virtuelles finies de chaque système partiel, par la somme des composantes de ses forces dans la direction de sa vitesse, est égale à zéro.* Comme chaque système partiel se meut en ligne droite, on pourra par des poulies de renvoi, remplacer les composantes des forces suivant la direction des vitesses, par des poids et faire en sorte qu'ils soient tous situés dans un plan horizontal : d'après ce qu'on vient de voir, la somme des poids du 1.er système, sera $\Pi + \Pi' + \Pi'' + \text{etc.}$, celle du 2.me sera $\Pi_{,} + \Pi'_{,} + \Pi''_{,} + \text{etc.}$ et ainsi de suite. Qu'on mette le système en mouvement; les espaces parcourus par les poids des

différents systèmes sont $p\,p'$, etc. et la distance du centre de gravité des poids au plan horizontal, sera

$$D=\frac{p(\Pi+\Pi'+\Pi''+\text{etc.})+p_{,}(\Pi_{,}+\Pi_{,}'+\Pi_{,}''+\text{etc.})+\text{etc.}}{\Pi+\Pi'+\ldots\ldots+\Pi_{,}+\Pi_{,}'+\text{etc.}}$$

Mais, d'après ce qu'on vient de voir, le numérateur est nul; par conséquent *si on transforme un pareil système en une machine à poids, et qu'on le mette en mouvement, le centre de gravité devra rester dans un même plan horizontal.*

Reprenons maintenant l'équation

$$\Pi dp+\Pi' dp'+\Pi_{,}dp+\Pi_{,}'dp_{,}'+\text{etc.}=0,$$

et supposons qu'elle soit une différentielle complette représentée par $d\xi$; il est démontré (Voy. *Mécanique analytique* 3.me *sect.*, 1.re *part. et* 6.me *sect.* 2.me *part.*) que l'équilibre sera stable, si ξ est un *minimum*; c'est-à-dire que si on dérange infiniment peu le système de sa position d'équilibre, il tendra par des oscillations à s'y rétablir; et que l'équilibre n'aura pas de stabilité, si ξ est un *maximum*, c'est-à-dire que le système une fois dérangé de sa position d'équilibre, s'en écartera de plus en plus; mais il résulte de ce qui précède, que si la valeur *maximum* de ξ, est égale au *minimum*, ou plutôt si $\xi=$const., le système sera dans un état d'équilibre qu'on pourrait appeler *indifférent*, pour le distinguer des deux autres, etc. il faut entendre par là que le système se trouvera en équilibre de quelque manière qu'on le dérange de son état primitif; et ce n'est que lorsque $\int(\Pi dp+\Pi' dp'+\text{etc.})=$const. que l'on peut aux vitesses virtuelles infiniment petites, substituer des vitesses virtuelles finies, observation qui, je crois, n'avait pas encore été faite; cette dernière proposition se démontre d'ailleurs directement, en observant que

$$\Sigma\Pi dp=0$$

étant la somme des momens dans une position d'équilibre, si on dérange le système de cette position, cette somme deviendra

$$\Sigma\Pi dp+d(\Sigma\Pi dp)\ \text{ou simplement}\ d(\Sigma\Pi dp)$$

parce que le premier terme est nul; ainsi le système continuera à se mouvoir en vertu du moment $d(\Sigma\Pi dp)$: au signe de cette différen-

tielle seconde, on reconnaîtra si l'équilibre est stable ou non-stable; mais si elle est nulle, c'est-à-dire, si $\Sigma\Pi dp =$ const. le système, après son déplacement, sera en équilibre comme dans sa position primitive. Pour éclaircir ce que nous venons de voir, déterminons les conditions d'équilibre d'un corps solide et homogène, d'un ellipsoïde, par exemple, sur un plan horizontal : soient x, y, z les coordonnées de l'un de ses points dm, rapportées à ses trois axes principaux; x', y', z', les coordonnées du même point rapporté à trois axes rectangulaires et fixes dans l'espace; a, b et c les cosinus des angles entre chacun des axes des xyz et celui des z'. Il existe entre ces quantités la relation

$$z' = z_{,} + ax + by + cz \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$z_{,}$ étant l'ordonnée verticale de l'origine des coordonnées des xyz, ou du centre de gravité de l'ellipsoïde; supposons l'ellipsoïde qui a pour équation

$$\alpha^2\beta^2z^2 + \beta^2\gamma^2x^2 + \alpha^2\gamma^2y^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2$$

tangente au plan horizontal des $x'y'$; la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'ellipsoïde sur ce plan, sera (*)

$$z_{,} = \sqrt{\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 + \gamma^2c^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

la gravité g étant la seule force qui agisse sur le corps solide, le principe des vitesses virtuelles donne pour condition d'équilibre

$$\Sigma g dm . dz' = 0$$

cette somme devant être étendue à la masse entière.

Mais (1) et (2) donnent

$$dz' = dz_{,} + x.da + y.db + z.dc = \frac{\gamma^2c.dc + \beta^2b.db + \alpha^2a.da}{\sqrt{\alpha^2a + \beta^2b^2 + \gamma^2c^2}} + x.da + y.db + z.dc$$

l'équation d'équilibre devient donc

$$\Sigma\left[\frac{g\gamma^2cdm.dc + g\beta^2bdm.db + g\alpha^2adm.da}{\sqrt{\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 + \gamma^2c^2}} + gxdm.da + gy.dm.db + gzdm.dc\right] = 0;$$

(*) *Voy.* la Mécanique de *Poisson*, vol. II.

mais les axes des x, y, z passant par le centre de gravité du corps, les sommes des trois derniers termes sont nulles, et l'équation prend la forme

$$\left(\frac{\gamma^2 c.dc + \beta^2 b.db + \alpha^2 a.da}{\sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2}}\right)\Sigma g.dm = 0$$

d'où

$$\gamma^2 c.dc + \beta^2 b.db + \alpha^2 a.da = 0 = d\xi \ldots\ldots (3)$$

comparant (3) à (2), on voit que, pour l'équilibre, il faut que $dz_{\prime} = 0$ c'est-à-dire que le centre de gravité doit être le plus haut ou le plus bas possible. Comme la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

donne

$$a.da + b.db + c.dc = 0;$$

elle change l'équation (3) en celle-ci

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\, a.da + (\beta^2 - \gamma^2)\, b.db = 0 = d\xi \ldots (4)$$

qui donne

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\, a = 0,\ (\beta^2 - \gamma^2)\, b = 0 \ldots\ldots\ldots (5)$$

d'où

$$a = 0,\ b = 0$$

c'est-à-dire qu'en général, pour l'équilibre, deux axes α et β doivent être horizontaux et le troisième γ vertical.

Pour reconnaître les différentes espèces d'équilibre, je différentie (4), et j'ai

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(da^2 + ad^2a) + (\beta^2 - \gamma^2)(db^2 + bd^2b) = d^2\xi$$

qui se réduit à

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\, da^2 + (\beta^2 - \gamma^2)\, db^2 = d^2\xi \ldots\ldots (6)$$

à cause de (5).

Nous venons de voir que l'équilibre sera *stable*, *non-stable* ou *indifférent*, suivant que l'intégrale de (3) ou de (4) sera *maximum*, *minimum* ou *constante*, ce que l'on peut reconnaître au signe de la différentielle seconde (6) de (4); car l'intégrale sera, en général, maximum, minimum ou constante, suivant que la différentielle seconde sera négative, positive ou nulle; je dis en général, parce que cette règle est sujette à des exceptions; ainsi, si on a

$$\alpha > \gamma \text{ et } \beta > \gamma$$

$d^2\xi$ sera positif, ξ sera un *minimum* et l'équilibre sera *stable;* l'équilibre est donc stable, si l'axe vertical est le plus petit des trois; si $\alpha < \gamma$ et $\beta < \gamma$, $d^2\xi$ sera négatif, ξ sera un *maximum* et l'équilibre sera *non-stable;* dans cette position, l'axe vertical γ est le plus grand des trois; mais l'équation (4) peut encore être satisfaite en supposant b invariable, ou $db = 0$ et $\alpha = \gamma$; alors $d^2\xi = 0$, $\xi =$ const. et l'équilibre est indifférent, c'est-à-dire que les vitesses virtuelles peuvent être finies; en effet le corps devient alors un ellipsoïde de révolution dont l'axe inégal reste horizontal; et il est évident que, dans cette position, on peut le faire tourner sans détruire l'équilibre; enfin si $\alpha = \gamma$ et $\beta = \gamma$, $d^2\xi$ sera encore nul, ξ constant, l'équilibre indifférent, et les vitesses virtuelles pourront être finies dans tous les sens; on voit que l'ellipsoïde devient alors une sphère.

(*La suite au n.° prochain.*)

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Dans un ouvrage par M. *Thomas Tredgold*, ayant pour titre : *Principles of Warming*, etc. *Principes de l'art de réchauffer et d'aérer les édifices publics*, etc., 1 vol. in-8.° avec neuf planches au burin et des gravures en bois dans le texte, Londres, 1824, on trouve la table suivante.

Table de l'expansion de l'air et des autres gaz, par diverses températures, et sans contact des corps humides.

	Température, échelle de Fahrenheit.	Vol. de l'air par l'expérience.	Vol. calculé par la formule $A\left(\frac{450+t}{450+x}\right)$	Vol. calculé par la formule $A\left(\frac{459+t}{459+x}\right)$
	— 32,8	0,8650	0,8655	0,8680
Term. de la Cong.	32°......	1,0000	1,0000	1,0000
Term. de l'ébull.	212.......	1,3750	1,3735	1,3666
	302.......	1,5576	1,6521	1,5500
	392.......	1,7389	1,7470	1,7332
	482.......	1,9189	1,9336	1,9165
	572.......	2,0976	2,1203	2,0998
Merc. bouillant.	680.......	2,3125	2,3443	2,3201

Cette table présente les expansions de l'air, telles qu'elles ont été observées par MM. *Dulong* et *Petit* : ils ont trouvé l'expansion du gaz hydrogène, à peu près la même que celle de l'air commun, par les mêmes températures. Les expériences de M. *Dalton*, donnent, à peu près, les mêmes résultats dans les limites de ses recherches, et M. *Gay-Lussac* a trouvé que l'air, la vapeur d'éther et celle de l'eau, avaient, à peu près, la même expansion, dans les températures semblables : il a trouvé l'expansion à 212° la même que MM. *Dulong* et *Petit* avaient observée. D'après les expériences de M. *Schmidt*, l'expansion de l'air, en passant de la glace fondante à l'eau bouillante, est 1,3574, et quelques expériences récentes de Sir *H. Davy*, semblent indiquer que l'expansion est la même pour l'air rare que pour l'air dense.

Lorsqu'on fait des expériences dans des températures élevées, il faut se rappeler que le verre éprouve un changement de volume permanent dans les hautes températures, surtout lorsqu'il n'a pas été recuit.

Soit T la température du gaz sous un volume B; et soit $\frac{B}{n}$ l'accroissement de volume correspondant à chaque degré d'élévation de la température (en supposant cet accroissement uniforme). L'expansion, à partir d'une température quelconque x, à toute autre température t, sera $\frac{B}{n}(t-x)$, et le volume, en passant de la température T à la température x, sera devenu $B+\frac{B}{n}(x-T)$ $=\frac{B}{n}(n+x-T)=A$ (A désignant le volume à la température x) : on aura donc

$$\frac{nA}{n+x-T}=B$$

substituant cette valeur de B dans $\frac{B}{n}(t-x)$, et l'ajoutant à A, on aura $A+\frac{A(t-x)}{n+x-T}$, c'est-à-dire, $\frac{A(n+t-T)}{n+x-T}$ qui est le volume à la température T, lorsqu'à la température x, ce volume est A, soit que le gaz soit dilaté ou condensé.

Si le volume B correspond au zéro du thermomètre de *Fahrenheit*, alors $T=0$, et $n=450$, et la formule devient $A\left(\frac{450+t}{450+x}\right)$ = le volume à la température t, quand il est A à la température x.

Si on prend B à 212°, qui est le terme de l'ébullition, alors $T=212$ et $n=671$, et l'on a $A\left(\frac{450+t}{459+x}\right)$ = le volume à t, quand celui à x, est A.

La table ci-dessus montre l'accord de ces formules avec l'expérience, accord qui a plus particulièrement lieu dans les températures élevées.

Dans ces formules, la température est négative, lorsqu'elle descend au-dessous de zéro.

La dernière formule, lorsqu'on y fait $x=212°$ *Fah.*, devient $A\left(\frac{459+t}{671}\right)$ = volume à la température t, quand il est A à la température 212°.

Les mêmes formules sont applicables à l'expansion des autres corps, quand on a établi la valeur de n.

Table des forces élastiques de la vapeur d'eau, à diverses températures (*).

Elasticité de la vapeur, en prenant la pression de l'atmosphère pour unité	Hauteur de la colonne de mercure qui mesure l'élasticité de la vapeur.	Température correspondante sur le thermomètre centigrade.	Pression exercée par la vapeur sur un centimètre carré de la soupape.
1	0,76	100	1,033
1 ½	1,14	112,2	1,549
2	1,52	122	2,066
2 ½	1,90	129	2,582
3	2,28	135	3,099
3 ½	2,66	140,7	3,615
4	3,04	145,2	4,132
4 ½	3,42	150	4,648
5	3,80	154	5,165
5	4,18	158	5,681
6	4,56	161,5	6,198
6 ½	4,94	164,7	6,714
7	5,32	168	7,231
7 ½	5,70	170,7	7,747
8	6,08	173	8,264

(*) Ce tableau est extrait de l'analyse des travaux de l'Académie royale des Sciences de Paris, pendant l'année 1824 : cette Académie a été plusieurs fois consultée par l'administration publique, sur les moyens les plus propres à prévenir l'explosion des machines à feu. Un premier rapport a indiqué les épreuves auxquelles les appareils doivent être soumis, et les précautions qu'il est nécessaire d'exiger : une ordonnance royale a rendu ces dispositions obligatoires, et il a été jugé convenable d'appeler de nouveau l'attention de l'Académie sur les moyens d'assurer et d'accélérer les moyens d'exécution. Le tableau ci-dessus n'est considéré par l'Académie que comme provisoire, quoique formé après une discussion attentive des meilleures observations. Le gouvernement français subvient aux dépenses que pourraient exiger les nouvelles recherches sur la mesure des forces élastiques correspondantes aux diverses températures. La commission de l'Académie s'occupe maintenant de ces importantes et difficiles observations. C'est ainsi que les physiciens dont les découvertes ont le plus contribué à la perfection de cette science, se sont toujours proposé de déduire de leurs théories de nouveaux avantages pour la société.

J. G. G.

STATISTIQUE (1).

Loi de mortalité à Bruxelles.

Nous n'entrerons dans aucun détail sur la composition des tables que nous allons donner, ni sur la manière de s'en servir; on pourra consulter à cet égard les divers Traités de calcul des probabilités, ou bien l'*Annuaire* du bureau des longitudes, qui contient une table de mortalité construite d'après les mêmes principes. Nous nous contenterons d'indiquer les principaux résultats qu'on peut en déduire. Les tables que nous présentons, ont été dressées séparément pour les hommes et pour les femmes : nous avons régularisé quelques résultats, comme on le fait ordinairement; parce que les déclarations des décès ne se font pas toujours exactement : les personnes qui l'indiquent, ou le savent mal, ou ne donnent que le nombre rond le plus approchant (2). On pourra du reste trouver dans un mémoire présenté à l'Académie de Bruxelles, les résultats tels que nous les avons obtenus, avec de nombreux développemens que nous devons négliger ici.

(1) Dans le numéro prochain, nous indiquerons le but des recherches qui constituent cette science, et qui sont divisées en six titres généraux : nous dirons en quoi la *Statistique* diffère de ce qu'on nomme l'*Économie politique*. Nous pensons que cet article extrait du compte rendu par l'Académie Royale des Sciences, dans sa séance du lundi 20 juin 1825, à l'occasion du prix de Statistique, fondé par M. *De Montyon*, pourra intéresser plusieurs de nos lecteurs; en même-temps qu'il fera ressortir l'importance des recherches de notre collaborateur M. *Quetelet*.

J. G. G.

(2) Voyez les calculs des probabilités par *Laplace* et *Lacroix*.

LOI DE LA MORTALITE A BRUXELLES.

AGES.	HOMMES.	FEMMES.	AGES.	HOMMES.	FEMMES.	AGES.	HOMMES.	FEMMES.
0	7418	6843	35	2921	2977	69	904	1167
1	5674	5536	36	2873	2928	70	835	1096
2	5023	4942	37	2824	2879	71	767	1023
3	4654	4614	38	2774	2830	72	699	948
4	4431	4409	39	2723	2780	73	631	872
5	4304	4225	40	2671	2730	74	564	797
6	4194	4209	41	2618	2680	75	498	723
7	4138	4137	42	2564	2629	76	433	650
8	4089	4100	43	2509	2578	77	369	581
9	4051	4069	44	2453	2527	78	319	517
10	4026	4039	45	2396	2476	79	269	457
11	4005	4016	46	2338	2425	80	234	402
12	3986	3992	47	2280	2374	81	202	352
13	3968	3967	48	2222	2323	82	172	307
14	3951	3941	49	2164	2272	83	144	268
15	3935	3914	50	2105	2221	84	119	232
16	3915	3887	51	2046	2170	85	97	198
17	3893	3859	52	1987	2119	86	76	165
18	3863	3830	53	1928	2068	87	54	133
19	3826	3799	54	1869	2017	88	42	101
20	3781	3766	55	1809	1966	89	30	73
21	3714	3721	56	1749	1915	90	21	55
22	3647	3673	57	1689	1864	91	14	41
23	3581	3620	58	1629	1813	92	9	30
24	3518	3563	59	1568	1762	93	6	22
25	3455	3505	60	1506	1711	94	4	17
26	3394	3448	61	1444	1659	95	3	14
27	3333	3392	62	1381	1606	96	2	11
28	3273	3337	63	1316	1550	97	1	8
29	3218	3283	64	1249	1492	98		5
30	3166	3230	65	1181	1431	99		2
31	3116	3178	66	1112	1368	100		1
32	3067	3127	67	1042	1303	101		1
33	3018	3077	68	973	1236	102		1
34	2969	3027						

En substituant aux nombres des figures qui peignent, pour ainsi dire, la loi de la mortalité, on trouve des lignes qui ne s'écartent pas sensiblement de celles qu'on a construites dans plusieurs autres pays.

Si l'on cherche quelle est la vie probable, c'est-à-dire, le nombre d'années après lequel la probabilité d'exister et celle de ne pas exister sont les mêmes, on trouve que ce terme, à compter de la naissance, tombe à Paris entre 8 et 9 ans; à Londres, un peu avant 3 ans; à Vienne, un peu avant 2; un peu après à Berlin: tandis que, d'après nos tables, ce terme tomberait vers 21 ans pour les garçons, entre 26 et 27 pour les filles, et après 23 ans, quand on ne fait aucune distinction de sexes. « La table de l'*annuaire*, moyenne pour toute la France, le place entre 20 et 21 ans; celle d'Angleterre, entre 27 et 28; celle de Brandebourg, entre 25 et 26; celle de Suisse, à 41 ans. Cette prodigieuse différence entre les campagnes et la ville, ne saurait être attribuée qu'aux suites de l'extrême misère, à la mal-propreté, au resserrement des demeures et à l'insalubrité qui en est la conséquence dans les capitales (1). » Cette grande disproportion ne peut-elle pas tenir encore à une loi de la nature, qui permet d'autant moins à une population de se multiplier, que le terrain qu'elle couvre, est déjà plus peuplé. Nous ignorons les moyens qu'elle emploie pour parvenir à ces fins; nous ne savons si le principe destructeur se trouve dans l'air même que nous respirons; mais à en juger par les effets, il en est de nous à peu près comme des arbres d'une forêt, qu'on ne saurait multiplier au delà de certaines limites dépendantes de la surface du sol qui les nourrit. Il est à remarquer d'ailleurs que la mortalité la plus grande atteint surtout les enfans au moment où ils entrent dans la vie; car pendant les deux premiers mois qui suivent leur naissance, il en meurt presqu'autant que pendant le reste de l'année, et c'est surtout sur le premier mois que porte l'excès de cette différence. Le vingtième, à peu près exactement, se trouve moissonné dès le premier mois, et plus du septième après la premiere année.

---

(1) Voyez le calcul des probabilités par M. *Lacroix*, à qui nous empruntons la plupart de ces données.

Dans l'hypothèse d'une population stationnaire, à l'âge de 5 ans, la vie probable est à son *maximum* à Bruxelles; elle est de plus de 44 ans pour les garçons, et de plus de 47 pour les filles : quand on ne fait aucune distinction de sexes, elle est d'environ 45 ans et demi. A l'âge de 30 ans, la vie probable est encore de 32 ans; à l'âge de 50, de 18; et à l'âge de 70, d'environ 7 ans.

A l'age de 40 ans, la vie probable est à Paris, de plus de 21 ans; en France, terme moyen, 23 ans; à Londres, 18; à Vienne, plus de 19 ans; à Berlin de même; en Suisse, près de 25. A Bruxelles, la vie probable à la même époque, est d'environ 23 ans, pour les hommes, de près de 26 pour les femmes, et d'environ 24, quand on ne fait point de distinction de sexes.

Selon *Price*, la probabilité de parvenir à 80 ans, est de $\frac{2}{43}$ dans le pays de Vaud, $\frac{2}{45}$ en Brandebourg, $\frac{1}{50}$ à Breslaw, $\frac{1}{57}$ à Berlin, $\frac{1}{40}$ à Londres, $\frac{1}{41}$ à Vienne. A Bruxelles, nous trouvons que cette même probabilité a pour valeur $\frac{1}{29}$ pour les hommes, $\frac{1}{17}$ pour les femmes, et $\frac{1}{27}$ quand on ne fait point de distinction de sexes.

On pourra, au moyen de nos tables, pousser ces rapprochemens plus loin, et l'on trouvera presque toujours que la mortalité à Bruxelles, est moins forte que dans les autres grandes villes.

Quoique le nombre des naissances des garçons l'emporte sur celui des filles, et soit, à peu près, dans le rapport de 13 à 12; cependant le nombre des femmes l'emporte à Bruxelles sur celui des hommes, et son rapport est d'environ 27 à 26, parce que les femmes, vivant généralement plus long-temps, accroissent rapidement cette partie de la population.

A. Q.

Dans un mémoire *sur la Mortalité en France* dans la classe aisée, comparée à celle qui a lieu parmi les indigens, lu à l'Académie des Sciences dans les séances des 29 nov. et 6 décem. 1824, par M. le D.r *Villermé*, l'auteur à mis en regard les deux arrondissemens de Paris (le 1.er et le 12.e) qui renferment l'un le plus

grand nombre de riches, et l'autre le plus grand nombre de pauvres : le nombre des décès, dans le premier arrondissement, est annuellement de 1 sur 50, et dans le douzième, de 1 sur 24, différence effrayante. Les résultats sont, à peu près, les mêmes pour les départemens riches et pauvres, comparés entre eux, toutefois avec une différence moins énorme que pour les arrondissemens et surtout pour les rues de la capitale. La mortalité dans les départemens riches, est annuellement de 1 sur 46, et dans les départemens pauvres, de 1 sur 33. Les recherches du Docteur *Villermé* sur la mortalité dans les prisons, sont du plus haut intérêt. En résumé, la conclusion des comparaisons qu'il a faites, est 1.° *pour les départemens pauvres, une mortalité de la moitié des habitans jusqu'à l'âge de 20 ans, tandis que, dans les départemens riches, la moitié des habitans atteint 40 ans : 2.° la mortalité n'est pas aujourd'hui en France, les deux-tiers de ce qu'elle était avant la révolution.* En 1781, on comptait en France, 1 décès sur 29 individus; en 1802, on ne comptait que 1 décès sur 30, et les cinq dernières années 1820 — 1824, ne donnent plus que 1 sur 39.

Le monde lentement vers le bonheur s'avance.

J. G. G.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Annales de l'Université d'Utrecht, 1823-1824.

L'Université d'Utrecht avait proposé cette question :

Exponatur dilucide et accurate theoria compositionis virium in qualibet directione in spatio agentium, atque conditiones æquilibrii earum definiantur. Perspicuitatis ita habeatur ratio ut, quæ in propinquo sunt, non ex remotioribus fontibus hauriantur. Neque tamen a re alienum est breviter indicare atque inter se comparare diversas methodos quibus ad easdem regulas generales constituendas perveniri possit.

On pourrait peut-être craindre que des jeunes gens appelés à prononcer entre des méthodes, ne se crussent par là constitués juges des maîtres de la science : une pareille témérité n'annoncerait pas un bon esprit, et conséquemment on ne doit pas supposer que l'auteur de la pièce couronnée, M. *G. J. Verdam* de l'Université de *Leyden*, dont nous avons déjà analysé deux bons mémoires, puisse encourir ce reproche. Il dit dans sa préface : *Quod attinet ad judicium quod passim ex methodorum comparatione ferre debui, leve nonnunquam videbitur et parvi momenti : in hoc autem me defendere non possum, nisi quando tam parvum fuit methodorum discrimen, ut difficile esset judicare quare hæc prævaleret illi.*

Son travail est divisé en deux sections dont la première a pour titre :

De compositione virium quarum directiones in eodem plano positæ sunt, et de earum æquilibrii conditionibus.

Cette section contient deux chapitres, savoir :

Caput primum. De compositione et æquilibrio duarum virium quocunque modo in corpus, sive in punctum aliquod agentium.

Caput secundum. De compositione et æquilibrio quamplurium virium, quocunque modo in corpus quoddam agentium.

La seconde section porte celui-ci :

De compositione virium quarum directiones utcunque in spatio dispositæ sunt, et de earum æquilibrii conditionibus.

Cette section contient aussi deux chapitres, savoir :

Caput primum. De compositione et æquilibrio trium virium in idem corporis punctum agentium.

Caput secundum. De compositione et æquilibrio quamplurium virium quocunque modo in corpus quoddam agentium.

Peut-être convenait-il de ne diviser ce travail qu'en deux chapitres, sous les titres mêmes des sections, ou, ce qui valait mieux encore, de considérer d'abord les forces qui agissent sur un point, et ensuite celles qui sollicitent un système invariable de forme. En adoptant ce dernier cadre, l'auteur aurait pu présenter chaque doctrine dans son ensemble, tandis que, dans son plan, il a été obligé de morceler les choses et de les entremêler, ce qui rend laborieux la lecture et l'examen de son mémoire d'ailleurs très-recommandable et digne à tous égards du prix qu'il a obtenu.

Le 1.er chapitre est divisé en deux paragraphes sous les titres : 1.° *De compositione et de conditione æquilibrii duarum virium in idem corporis punctum agentium* : 2.° *De compositione et de conditione æquilibrii duarum virium quæ ad diversa corporis puncta sunt applicatæ.*

1.° Après avoir énoncé le principe de la composition de deux forces, et avant d'en aborder la démonstration, l'auteur dit : *hoc principium facile demonstratur, si vires tanquam motum producentes considerantur.* C'est sous ce point de vue que *Lagrange* le considère (Méc. Analy. 1.re Sect., pag. 19). Ce grand Géomètre s'exprime ainsi : « Il faut avouer qu'en séparant ainsi le principe de la composition des forces, de celui de la composition des mouvemens, on lui fait perdre ses principaux avantages, l'évidence et la simplicité, et on le réduit à n'être qu'un résultat de constructions géométriques ou d'analyse.» *Bernoulli*, au contraire, s'em-

porte très-fort contre ceux *qui confundunt compositionem virium cum compositione motuum.* M. *Prony*, page 54 de ses *Leçons de Mécanique Analytique*, (not.) se flatte d'avoir dégagé entièrement l'exposition de la Statique, des considérations de mouvement qui y étaient ordinairement introduites, et d'avoir, en cela, rendu un service aux études élémentaires. On peut croire que M. *Verdam* adopte l'opinion de *Lagrange*, lorsqu'il dit : *igitur et si vires componentes non MOVEANT, sed PREMANT punctum seu corpus* P, *eundem effectum edere conantur ac unica vis composita magnitudine et directione proportionalis diagonali* PD *parallelogrammi* etc. Le *premant* est pour la Statique et le *moveant* pour la Dynamique : il termine ce paragraphe par la théorie des momens, étendue seulement à deux forces et à leur résultante.

2.° Pour que le lecteur ne soit pas induit en erreur par l'énoncé du second paragraphe, nous observerons qu'il ne s'agit ici que de deux forces appliquées à deux points d'une ligne rigide, et sans pesanteur, dont l'auteur cherche la grandeur et la direction de la composante; il passe de là à la considération de deux forces parallèles. Je regrette que M. *Verdam* n'ait pas parlé *des couples*.

Le chapitre second est aussi sous-divisé en deux paragraphes ;

1.° *De compositione et æquilibrio quamplurium virium in idem punctum agentium* : 2.° *De compositione ac æquilibrio quamplurium virium ad diversa corporis puncta applicatarum.*

Il ne faut pas perdre de vue que les forces sont situées dans un même plan.

1.° Après avoir traité la question géométriquement, l'auteur la reprend par l'analyse et parvient aux trois équations connues... $S(P\cos.\alpha)=X$, $S(P\cos.\beta)=Y$, $S(P.p)=R.r$, qu'il modifie pour le cas de l'équilibre.

2.° Il montre d'abord que ce système admet toujours une résultante unique; d'où il conclut qu'on parviendra aux deux mêmes équations d'équilibre que dans le cas précédent : quant à l'équation des momens, après l'avoir mise sous cette forme

$$(yP\cos.\alpha+y'P'\cos.\alpha'+\text{etc.})-(x.P\cos.\beta+x'.P'\cos.\beta'+\text{etc.})$$
$$=y_{,}.R\cos.A-x_{,}.R\cos.B,\ \text{ou}=0\ \textit{dans le cas d'équilibre},$$

$y, y' \ldots, x, x' \ldots y_{,}$ et $x_{,}$ désignant les coordonnées des points d'ap-

plication des forces et de leur résultante, l'auteur dit : *Res igitur eodem redit ac si decomponimus singulas vires in duas quæ sunt axibus parallelæ, atque si harum virium compositionem instituimus : eam ab causam, atque ut rei magis convenienter agamus, primum investigandæ sunt regulæ compositionis virium parallelarum : his autem cognitis, melius judicare possumus de æquationibus* (ci-dessus) *quæ, quanquam compositio virium datarum, eamque ob rem, compositio virium parallelarum iis continetur, tamen dilucide non monstrant in quo hæc compositio posita sit.* Il place donc ici le titre : *De compositione et æquilibrio virium parallelarum;* puis revenant à la composition des forces non-parallèles, il détermine la grandeur et la direction de leur résultante. Je suis convaincu que si M. *Verdam* écrivait un traité sur cette matière, il se croirait obligé d'adopter une marche tout-à-fait différente, et d'après laquelle il ne serait pas obligé de couper ainsi l'exposition d'une doctrine, par la démonstration d'un principe qui déjà aurait dû trouver sa place. Telle est la substance de la première section.

Le premier chapitre de la seconde section, ne porte que sur la composition de trois forces qui concourent dans l'espace.

Le second est divisé en deux paragraphes : 1.° *De compositione ac æquilibrio virium ad idem punctum applicatarum :* 2.° *De compositione ac æquilibrio quamplurium virium ad diversa puncta agentium.*

Le premier paragraphe appartenait de droit au chapitre précédent : il y a inconvénient à séparer ainsi des choses *sui generis,* ou qui ne sont que les parties d'un même tout.

Dans le second paragraphe, l'auteur, après avoir décomposé les forces suivant les trois axes, et évalué analytiquement les composantes qui en résultent, et qui forment des systèmes de forces parallèles, dit : *Ut autem omnia bene statuamus, opus est primum cognoscere quomodo inveniantur magnitudines et justæ directionum positiones virium compositarum, atque primum igitur consideremus compositionem et æquilibrium virium quarum directiones in spatio positæ, parallelæ sunt.* Cette affaire faite, l'auteur reprend la solution de la question générale, et aux équations de translation déjà obtenues, il ajoute celles de rotation. Enfin il examine le cas où le corps n'est plus absolument libre, et il termine par la

condition sous laquelle les forces concourent et admettent une résultante unique.

Ce que nous venons de dire nous paraît indiquer clairement la marche qu'a suivie l'auteur du mémoire, marche dont nous avons signalé les inconvéniens. M. *Verdam*, même avec tout le talent dont il a fait preuve, ne pouvait rien dire de neuf sur un fond exploité par les Géomètres les plus distingués, et qu'on peut regarder comme épuisé. Dans ces deux sections, il renvoie souvent aux notes qui font le sujet de la troisième, et qui forme la partie la plus intéressante de son travail : c'est là qu'il montre beaucoup d'érudition et un jugement très-éclairé.

Cette troisième section a pour titre : *Annotationes in præcipua argumenta theoriæ compositionis virium, quibus continentur expositiones et comparationes methodorum quæ ad easdem regulas generales constituendas conducunt.* Elle comprend dix notes dont la première seule est divisée en paragraphes. Après un historique intéressant, fait en partie d'après *Lagrange* (Méc. Analy., I.re Sect.), et en partie d'après les mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, l'histoire des Mathématiques de *Montucla*, et les ouvrages originaux, historique que M. *Guinard* a mis en tête de sa pièce (Correspondance n.° II). M. *Verdam*, dans le paragraphe 1.er ayant pour titre : *Expositio et comparatio demonstrationum quæ compositione motus nituntur*, a donné la composition des forces déduites de celles des mouvemens, due à *Varignon*, celle du P. *Lamy*, celle de *Newton*, qui diffère peu de la démonstration de *Varignon*, celle de *Bossut*, fondée aussi sur la considération du mouvement; et ce premier paragraphe, sur lequel le rapprochement de ces démonstrations originales répand de l'intérêt, est terminé par ce jugement : *quod si attendamus ad simplicitatem et intelligentiæ facilitatem, nulla fere demonstratio præstantior habetur, quam ea quæ a Varignonio excogitata est; ea enim nullis considerationibus alienis permixta, cum rei natura vel maxime convenit, ideoque ex fonte propinquo petita est.* Dans le paragraphe II : *Expositio et comparatio methodorum quibus principium compositionis virium, aut ex æquilibrii natura, aut ex ipsa causa effectus, demonstratum est*, contient les démonstrations de *Jean Bernoulli* et de *Monge* (Trait. élém. de Stat.) : à la suite de cette dernière, on trouve cette

opinion : *In hoc igitur utitur majore rigore Mathematico, quam Jacob. Bernoulli; sed in eo etiam præcellit demonstratio, quod consideratio vectis angularis, eleganti modo evitata est, cum cœteroquin demonstrationis ratio ita se habeat, ut quæ optima haberi possit omnium demonstrationum parallelogrammi virium, quæ ex vectis proprietate petitæ sunt.* Nous n'omettons aucun des jugemens portés par ce jeune Géomètre, parce qu'ils nous paraissent très-propres à fixer l'opinion sur le mérite de la pièce que nous analysons, et à motiver la décision de l'Université qui l'a couronnée. M. *Verdam* dit ici : *Sæpius cogitavi et tentavi num compositionis virium principium ita ex æquilibrii natura geometrice probari posset, ut aut nullis principiis Mechanices (veluti principio vectis) niteretur demonstratio; aut e talibus Mechanices proprietatibus hauriretur, quæ absque principio vectis justo modo paterent; sed nunquam mihi contigit, ut ad generalem principii demonstrationem pervenirem.* Nous regrettons de ne pouvoir faire connaître ces tentatives du jeune Géomètre. L'auteur expose ensuite de la démonstration ingénieuse mais très-longue, due à *Daniel Bernoulli*, fils de *Jean*, ce qu'il suffit d'en savoir pour la compléter : nous dirons seulement qu'elle est indépendante de la nature du mouvement, de l'équilibre et de toute propriété du levier. M. *Verdam* rapporte les observations de *Lagrange* et de *Jean Bernoulli*, à l'occasion desquelles il émet cette opinion que nous partageons : *Maluerim eam ab causam nonnunquam illas demonstrationes quæ motu superstructæ sunt, quippe per eas dilucide et accurate exponatur quinam sint effectus; cum illæ quæ causas spectant, aut mutilæ sint, aut semper aliquantum ad effectum recurrant.* « Malheureusement, dit *Bossut* (Hist. » des Math. dern. édit. pag. 181), toutes ces démonstrations sont » trop longues et trop embarrassantes, pour pouvoir trouver commodément place dans les Traités ordinaires de Statique; mais » du moins, elles existent dans les écrits des Géomètres comme » des garants multipliés d'une vérité dont on a d'ailleurs la preuve par des moyens plus faciles et plus à la portée des commençans ». Ce second paragraphe est terminé par une courte analyse de la démonstration connue de *Duchayla*, sur laquelle on trouve ce jugement conforme aux idées de l'auteur sur ce point : *Ratio hujus demonstrationis, elegans est : sed eam inservire non posse*

arbitramur Mechanices fundamentis simplicissime et firmissime ponendis. Le paragraphe III a pour titre : *Expositio et comparatio demonstrationum analyticarum parallelogrammi virium* : l'auteur y passe en revue celles de *Lagrange*, de *D'Alembert*, *Poisson*, *Lobatto*, *De Laplace*. Nous rapporterons le plus succinctement possible les jugemens de M. *Verdam*. D'abord, sur celle de LAGRANGE (Trait. des Fonct. analy:, part. IIIme, chap. II) il dit : *Atque ob easdem rationes, eamdem demonstrationem meliorem non esse sequentibus demonstrationibus, haud temere opinor. Cæteris enim omissis, demonstrationi a Summo* LAPLACE *positæ, major debetur præstantia; quandoquidem nullo principio e motu aut e pressione deducto nititur. Attamen in eo laudanda est exposita demonstratio, quod directe procedit, quod brevis est, et primariis matheseos elementis absolvitur.* Sur D'ALEMBERT, POISSON et LOBATTO : *Igitur quamvis singulæ demonstrationes propriis elegantiæ laudibus gaudeant, tamen quia* D'ALEMBERTUS *primam analyticam demonstrationem fecisse videtur, huic illustrissimo viro inventoris honos debetur, cum tamen Cel.* POISSONIUS *et vir clar.* LOBATTO *indolem hujus demonstrationis majori perspicuitate et simplicitate exposuerint; eamque gradatim e fonte magis propinquo hauserint.* Sur M. LAPLACE : *ut autem indicemus, quo usque pervenerit ingenium humanum hac in re, atque ut inde ostendamus fieri posse ut perfecta demonstratio analytica parallelogrammi virium aliquando prodeat, expositiuri sumus denique demonstrationem analyticum Summi* DE LAPLACE, etc. Dans un appendix à cette note, M. *Verdam* propose quelques changemens à la partie Géométrique de la démonstration de M. *Lobatto*, que nous avons rapportée (Corr. n.° II).

La note II porte sur ce théorème que le moment de la résultante, est égal à la somme des momens des composantes. Dans cette note, M. *Verdam* démontre d'après *Prony*, cette formule des momens $Pp + P'p' + P''p = o$, entre trois forces qui se font équilibre, formule qui n'est qu'une conséquence de celles-ci, $P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' = o$, $P \sin. \alpha + P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha'' = o$ qui expriment autrement l'équilibre des trois mêmes forces. Mais on a aussi et très-généralement, $Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = R.r$ dans laquelle p, p', p'' ... r sont des perpendiculaires menées du centre O des momens, sur les directions des forces et de la résultante qui concourent en M. On a encore la formule $P\pi + P'\pi' + P''\pi'' + \text{etc.} = R\rho$

qui est, dans le même cas, celle des vitesses virtuelles finies ou infiniment petites, représentées par π, $\pi' \ldots \rho$, qui sont des longueurs interceptées sur les directions des forces, entre le point M d'application et les pieds des perpendiculaires p, $p' \ldots \rho$, formule qui est la conséquence des équations générales $P \cos. \alpha + P' \cos. \alpha' + \text{etc.} = R \cos. a$, $P \sin. \alpha + P'' \sin. \alpha' + \text{etc.} = R \sin. a$, et dans laquelle $\pi = l \sin (\alpha - \theta) \ldots \rho = l. \sin. (a - \theta)$, l représentant la distance MO et θ l'angle entre cet axe et celui des x. Dans ces deux dernières, on peut supposer, $r = o$, $l = o$, $\alpha - \theta = o$; d'où $\rho = o$, et enfin $R = o$. Dans cette dernière hypothèse, le théorème $P.p + P'p' + \text{etc.} = o$ s'étend à un nombre quelconque de forces, et il n'est plus une conséquence des équations générales d'équilibre

$$S (P \cos. \alpha) = o, S (P \sin. \alpha) = o,$$

tandis que pour trois forces en équilibre, il résulte, comme nous l'avons dit, de ces trois équations. Nous aurions désiré que M. *Verdam* s'arrêtât sur ce point.

La note III porte sur ce principe : *Si consideramus lineam AB tanquam vectem inflexibilem, nullò pondere præditum, e cujus extremitatibus pendeant duo pondera* P *et* Q, *erunt hæc pondera in æquilibrio circa fulcrum* F, *si inter se sint in ratione inversa brachiorum* AF *et* BF ; elle est terminée par cette observation : *Animadvertere hoc loco non alienum est alterutrum principiorum sive vectis, sive compositionis virium, facile demonstrari alterius ope, cum tamen utriusque separata vel directa demonstratio ejusmodi non sit quæ, ob simplicitatem et perfectam perspicuitatem, ab omnibus concedatur.*

Dans la note IV, l'auteur tire très-simplement de l'équation aux vitesses virtuelles, les trois équations qui expriment l'équilibre de translation suivant les trois axes ; mais il trouve cette marche beaucoup moins naturelle que celle de la simple décomposition des forces qu'on emploie communément ; nous serions de son avis, s'il ne s'agissait que de la composition d'un Traité élémentaire de Statique.

La note V est employée à tirer du principe des vitesses virtuelles, l'équation générale des momens d'un système de forces situées d'une manière quelconque dans un plan.

Dans la note VI, il scrute la méthode de *Prony*, pour la déter-

mination du centre des forces parallèles; tant dans un plan que dans l'espace : il y signale une considération indirecte et dit : *Quamvis nemo negare possit illam indirectam considerationem de qua monuimus, si per se spectemus demonstrationem, ingeniose esse inventam ad compositionis leges virium parallelarum determinendas.*

Dans la note VII, et à l'occasion de la composition et de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces situées dans un plan, que plusieurs auteurs ont traitées de la même manière, il dit : *Poissonius aliam ingressus est viam, in æquilibrii conditionibus constituendis*, et il rapporte l'analyse de ce dernier.

Dans la note VIII, il étend l'analyse de *Poisson* à l'espace; il donne ensuite celle de *Prony* dont il dit : *Elegans sane est hæc methodus quæ directe procedit, neque alienas opes in auxilium vocat*, puis il porte ce jugement : *Demonstrationes* Poissonii et Prony *in eo differunt quod in hac, vires decompositæ; in illa autem, vires agentes positione mutantur.* Enfin il termine cette note par l'exposition de l'analyse de *Lagrange*, pour tirer les six équations d'équilibre du principe des vitesses virtuelles.

La note IX qui pouvait faire corps avec les deux précédentes, porte exclusivement sur les trois mouvemens de rotation : *Theoria compositionis motus rotatorii in corpore libero*, dit-il, *intellectu semper difficilis est, ob rei abstractam indolem; eaque fortasse causa est cur ego in illa expositione tanta evidentia et perspicuitate non usus sim, qua res unicuique pateret. Adjicio eam ob rem methodum qua Celeb.* Lagrange *illam compositionem explicavit; ea enim methodus, quanquam ex remotiori fonte hausta, magna tamen elegantia et simplicitate prædita est.*

Enfin la note X et dernière est relative à l'équation de condition qui exprime que les forces appliquées au corps, ont une résultante unique, et il dit : *Methodi quibus viri clarissimi* Poissonius *et* Prony *hanc invenerunt æquationem conditionis, ob simplicitatem et elegantiam, summo jure cognosci et conferri merentur.*

Nous recommanderons la lecture de ce mémoire aux élèves qui ont déjà des connaissances en mécanique, convaincu qu'ils ne parcourront pas sans fruit cette intéressante galerie de démonstrations sur les points fondamentaux de la science : peut-être jugeront-ils comme nous, que M. *Verdam* n'a pas adopté le meilleur plan pos-

sible, ce dont nous avons été à même de juger par le temps que nous a coûté cette analyse qui aurait été moins laborieuse dans une autre coordination des parties. Quoiqu'il en soit, ce travail ajoute à l'opinion honorable que les deux autres pièces ont fait concevoir de cet élève : nous regrettons seulement que, dans cette revue des travaux des Géomètres, ne figurent pas ceux de MM. *Carnot*, *Poinsot* et *Binet* auxquels la science de l'équilibre et du mouvement doivent de belles recherches et des vues neuves et profondes.

J. G. G.

Essai philosophique sur les probabilités, par M. le marquis De Laplace, *pair de France, membre de l'Académie française, de l'Académie des Sciences, etc.*, 1 *vol. in*-8.° *de* 276 *pages.*

Cet ouvrage est le plus philosophique que l'on ait jamais écrit : en moins de trente ans, quatre éditions successives l'ont répandu dans toute l'Europe et déposé dans toutes les bibliothèques; cependant on n'a pu remarquer son influence que dans quelques questions d'économie politique et dans les progrès qu'ont fait les méthodes d'expériences et d'observations. La philosophie n'en a fait aucun usage; ce qui, dans l'enseignement public, ose encore porter le nom de cette science, ne diffère que le moins possible des anciennes doctrines de l'école, et les vérités modernes que l'on y trouve, n'ont été admises que par bienséance, ou pour servir de passeport et de sauve-garde à ce que l'on voulait conserver, en dépit de la raison (1). On ne rend pas même au livre de M. *De Laplace*

---

(1) Il ne faut pas perdre de vue que ceci est écrit en France, et s'applique à l'état des choses dans ce pays.

J. G. G.

l'hommage que reçoivent annuellement des auteurs qu'on ne lit plus; il est parfaitement à l'abri de la critique par la même cause qui, dit on, mit Dieu à couvert des médisances de l'*Arétin*. Cette singulière destinée d'un ouvrage aussi remarquable, excite une curiosité qui n'a rien de futile : essayons de l'expliquer.

« Cet essai philosophique, dit M. *De Laplace*, est le développement d'une leçon sur les probabilités que je donnai en 1795, aux Ecoles normales où je fus appelé comme professeur de Mathématiques avec *Lagrange*, par un décret de la Convention nationale (1). J'ai publié depuis peu sur le même sujet un ouvrage ayant pour titre : *Théorie analytique des probabilités*. Je présente ici, sans le secours de l'analyse, les principes et les résultats généraux de cette théorie, en les appliquant aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont, en effet, que des problêmes de probabilités (2). On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre de choses que nous pouvons savoir avec certitude (3), dans les Sciences Mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, *l'induction* et *l'analogie*, se fondent sur les probabilités, en sorte que le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie exposée dans cet essai. On y verra sans doute, avec intérêt qu'en ne considérant, même dans les principes éternels de la *raison*, de la *justice* et de l'*humanité*,

(1) Ajoutons à ces deux noms illustres celui de *Monge*, et, dans un autre ordre de connaissances, ceux de *Vandermonde*, *Sicard*, *Garat*, etc.

J. G. G.

(2) Cet essai philosophique est à la Théorie analytique des probabilités, ce qu'est l'Exposition du système du monde à la Mécanique céleste du même auteur.

J. G. G.

(3) Il est remarquable que cette opinion sur nos connaissances, soit surtout celle des plus grands Géomètres. On connaît le mot favori de *Lagrange* : *Je ne sais pas*. A la vérité, *Montaigne* et quelques philosophes, étaient de cet avis que ne partage pas le plus grand nombre de nos jeunes gens.

J. G. G.

que les chances heureuses qui leur sont constamment attachées, il y a un grand avantage à suivre ces principes et un grand inconvénient à s'en écarter; leurs chances, comme celles qui sont favorables aux loteries, finissent toujours par prévaloir au milieu des oscillations du hasard (1). »

Nous avons transcrit cette exposition claire et précise de l'objet de cet ouvrage, parce qu'elle en présente une analyse à laquelle il suffira d'ajouter quelques développemens, et parce qu'elle semble donner l'explication du phénomène qui nous occupe. Le travail de M. *De Laplace* sur les probabilités, a paru pour la première fois sous la forme de *Théorie analytique* : il a obtenu sous cette forme, le succès qu'il méritait; il ne pouvait demeurer stérile pour les sciences. Mais précisément parce que les géomètres l'ont adopté, parce qu'il a fourni des méthodes de calcul, *les Philosophes qui ne calculent point*, ont pensé qu'ils n'y trouveraient rien qui leur convînt, et qu'il appartenait exclusivement à des sciences qui ne sont pas l'objet de leurs méditations (2). Si l'*Essai philosophique*

---

(1) On sait que, dans les premières éditions *de l'Exposition du système du monde*, M. *De Laplace* avait dit des connaissances astronomiques : « Leur plus grand bienfait est d'avoir dissipé les erreurs nées de l'ignorance » de nos vrais rapports avec la nature, erreurs d'autant plus funestes que » l'ordre social doit reposer uniquement sur ces rapports : *vérité, justice,* » *humanité*, voilà ses loix immuables. Loin de nous la dangereuse maxime » qu'il est quelquefois utile de s'en écarter ou d'asservir les hommes pour » assurer leur bonheur : de fatales expériences ont prouvé dans tous les temps » que ces lois sacrées ne sont jamais impunément enfreintes ». Ce passage, de toute vérité, a été modifié dans les éditions suivantes, comme l'a observé M. *Fery*, l'un des collaborateurs de la Revue, et auteur de l'analyse que nous rapportons ici.

J. G. G.

(2) Aussi les géomètres en ont appliqué les principes aux paris, aux jeux de hazard, aux probabilités de la vie humaine, aux rentes viagères, aux assurances sur la vie et sur les choses, aux associations, etc., etc. : mais tout ce qui a rapport à la probabilité des témoignages et des décisions, aux questions d'élection, etc., etc., sortait en quelque sorte de leur domaine, et rentrait dans celui de la philosophie.

J. G. G.

avait paru le premier, même sans la grande recommandation de la renommée de son auteur, il n'aurait pas été négligé; on n'eût pu se dispenser de le lire; les esprits justes l'auraient compris, et les amis sincères de la vérité, professeraient aujourd'hui ces doctrines : *la Théorie analytique des probabilités* aurait trouvé les esprits encore mieux préparés à la recevoir, et peut-être ses applications auraient été plus nombreuses encore et plus importantes : mais comment prévoir ces chances de l'avenir? elles ne donnent aucune prise au calcul, et restent dans le domaine de ce qu'il faut nommer le *hasard*.

Les mots *probabilités*, *causes*, *hasard*, *certitude*, obscurcis par la Métaphysique, reprennent ici leur clarté primitive; à l'aide de ces notions devenues lucides, l'auteur établit les principes généraux du calcul des probabilités : rapportons la définition qu'il donne de *l'espérance* : « C'est, en général, l'avantage de celui qui attend un bien dans des suppositions qui ne sont que probables : cet avantage, dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir; c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut pas courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition se fasse proportionnellement aux probabilités (1). Cette répartition est la seule équitable, lorsqu'on fait abstraction de toutes les circonstances étrangères, parce qu'un égal degré de probabilité donne un droit égal à la somme espérée ». On voit que M. *De Laplace* n'a pas en vue la plus précieuse des espérances, ce lien qui nous attache à la vie, au sein des plus grandes infortunes : il n'appartient pas encore, même au génie, de soumettre les affections morales au calcul mathématique et de représenter les sentimens par des nombres.

En traitant des méthodes analytiques du calcul des probabilités, M. *De Laplace* met à la portée des lecteurs très-peu instruits en

---

(1) On conçoit que cette définition conçue en termes évaluables en nombres, est elle-même traductible en nombres, ce qui n'arriverait plus, si on ne restreignait pas l'acception du mot *espérance* : ainsi la définition mathématique est nette, quand la définition métaphysique est vague.

J. G. G.

Mathématiques, la théorie générale des combinaisons ; mais il ne peut qu'indiquer les méthodes mathématiques d'un ordre plus élevé. C'est dans d'autres ouvrages qu'il faut se familiariser avec les *équations aux différences finies partielles à plusieurs indices*, etc.

Les applications du calcul des probabilités commencent par les jeux ; mais elles s'étendent à des sujets plus graves, aux recherches relatives au système du monde et aux lois générales des phénomènes qu'il manifeste, à quelques sciences morales, entre autres à l'économie politique, à l'autorité des témoignages, aux choix et aux décisions des assemblées, aux jugemens des tribunaux. Arrêtons-nous un moment sur ce dernier sujet.

Après avoir discuté avec étendue la question de la pluralité dans les décisions du jury, et fait toutes les applications de calcul dont cette matière est susceptible, M. *De Laplace* arrive à cette conclusion remarquable : « La probabilité des décisions est trop faible dans nos jurys, et je pense que pour donner une garantie suffisante à l'innocence, on doit *exiger, au moins, la pluralité de neuf voix sur douze* ». Cette opinion de l'auteur est connue depuis longtemps, et cependant on n'a point hésité à prononcer des arrêts de mort à la pluralité ordinaire. On est allé beaucoup plus loin dans les procès politiques : un parti s'est réservé le choix des jurés, la passion a pris quelquefois la place de la justice : dans la crainte de ne pas sévir contre ce qu'on appelait des crimes, on n'a pas craint de laisser tomber la hache sur des têtes innocentes.

Malgré l'importance et la solemnité des jugemens criminels et les hautes méditations qu'elles provoquent, l'esprit philosophique s'arrêtera peut-être encore plus sur un autre sujet : *les illusions dans l'estimation des probabilités.* On apprend avec étonnement que les meilleurs esprits ne sont pas à l'abri de cette source d'erreurs, et, parmi ces esprits, on compte des Géomètres du premier ordre, *Leibnitz* et *Daniel Bernoulli.* L'auteur traite un genre d'illusion, qui dépendant uniquement des lois de l'organisation intellectuelle, exige pour s'en garantir, un examen approfondi de ces lois. « Aux limites de la physiologie visible, commence une autre physiologie dont les phénomènes beaucoup plus variés que ceux de la première, sont comme eux, assujettis à des lois qu'il est très-important de connaître. Cette physiologie que nous désigne-

rons sous le nom de *Psychologie*, est, sans doute, une continuation de la physiologie visible. Les nerfs dont les filamens se perdent dans la substance médullaire du cerveau, y propagent les impressions qu'ils reçoivent des objets extérieurs, et ils y laissent des impressions permanentes qui modifient d'une manière inconnue, le *sensorium* ou siège de la sensation et de la pensée ». Le développement de cette histoire occuperait trop de place; il nous est interdit de l'insérer ici. L'auteur joint à ses observations plusieurs faits d'un grand intérêt et féconds en instruction. Ce n'est pas de méthaphysique que son ouvrage est composé : les fondemens de ses doctrines, ne sont pas hors de la nature et des voies qui peuvent conduire à la certitude : c'est par la recherche de ces voies qu'il termine son ouvrage ; on y remarquera des observations sur *l'analogie* dont les opérations sont entièrement fondées sur le calcul des probabilités, et ne peuvent être utiles que dans les cas où le calcul peut les vérifier.

Une notice historique sur le *calcul des probabilités*, eût pu servir d'introduction à cet essai, au lieu de ne se présenter qu'à la fin : cependant on conviendra volontiers que l'auteur ne pouvait entrer trop promptement en matière, et qu'après avoir lu son ouvrage, on est encore fort disposé à suivre dans cette notice, l'histoire des connaissances qu'on vient d'acquérir. Cette cinquième édition s'écoulera peut-être encore plus rapidement que les précédentes. Espérons que l'on ne se contentera pas d'avoir le livre et que l'on se mettra décidément à l'apprendre.

(*Revue Encyclop.*) Fery, rédacteur.

J. G. G.

Revue de divers Ouvrages mathématiques publiés dans ce royaume.

Essai d'un cours de Mathématiques à l'usage des élèves du Collége Royal de Liège; par H. Forir, *professeur audit Collége.* Arithmétique, 1823, in-12.

L'auteur de cet ouvrage, comme il l'annonce dans son avertissement, n'a eu pour but que d'offrir un extrait de ceux de MM. *La Croix, Garnier, Regnaud, Noël,* et approprié au système d'enseignement qu'il suit depuis plusieurs années. « En le composant, ajoute-t-il, je n'ai nullement ambitionné d'être neuf; dans une matière aussi épuisée, ce serait une prétention ridicule : que pourrait-on ajouter aux excellentes productions que je viens de citer ? » L'auteur s'est jugé sans doute avec plus de sévérite que ne le feront des lecteurs qui tiennent quelque compte de la concision. Nous observerons cependant, tout en sentant la justesse de l'épigraphe : *in scientiis addiscendis, magis exempla prosunt quam præcepta,* qu'il ne faut pas trop sacrifier la théorie à la pratique : on pourrait regretter, par exemple, que M. *Forir* ait entièrement négligé de parler de la théorie des rapports et des proportions.

A. Q.

Arithmétique élémentaire, raisonnée et appliquée, par J. N. Noel, *professeur des sciences physiques et mathématiques à l'Athénée de Luxembourg;* 3.e *édition in-8.°,* 1825.

La première édition de l'Arithmétique de M. *Noël,* a paru en 1819. Depuis ce temps, cet habile professeur est revenu sur son travail, et

y a fait un grand nombre de corrections et de changemens utiles. Il a cru devoir diviser son traité en deux parties, « dont la première renferme les démonstrations des principes de calcul nécessaires à la solution de toutes les questions qui se rapportent au commerce et à la banque; et dont la deuxième, qui est une extension de la première, est destinée à compléter quelques théories indiquées dans cette première, ou à démontrer plus rigoureusement certaines règles de calcul : c'est une espèce d'introduction à l'Algèbre ». L'auteur y a fait entrer depuis encore un nouveau supplément dans lequel il expose rapidement et avec clarté la résolution des équations du premier et du second degré, le calcul des exposans et celui des logarithmes. Cette dernière partie paraît destinée à servir d'introduction à la Géométrie et à la Trigonométrie. Un grand nombre de questions, choisies avec discernement, offrent autant d'applications utiles et intéressantes pour l'élève qui trouve d'ailleurs toujours les indications nécessaires pour diriger sa marche.

L'attention de l'auteur s'est portée aussi sur les définitions qui forment la partie vraiment essentielle de toute science, puisque ce sont pour ainsi dire des points de départ auxquels viennent se rattacher les fils de tous nos raisonnemens. M. *Noël* regarde la division comme ayant pour but de décomposer un produit par un de ses facteurs. Quant à la multiplication, il l'énonce, d'aprés M. *Cauchy*, comme *une opération par laquelle, connaissant deux nombres, appelés* MULTIPLICANDE et MULTIPLICATEUR; *on en trouve un troisième en opérant sur le multiplicande, comme on a trouvé le multiplicateur, en opérant sur l'unité. Ce troisième nombre se nomme* PRODUIT; *le multiplicande et le multiplicateur sont les facteurs du produit.* L'auteur adopte cette définition, parce qu'il pense qu'elle s'applique avec la plus grande facilité aux nombres entiers, aux fractions et même aux *quantités négatives* de l'Algèbre : c'est en cela surtout, ajoute-t-il, que cette définition est avantageuse, parce qu'elle donne une idée nette de la multiplication par une fraction et par un nombre négatif; ce qui n'avait pas lieu sans efforts avec l'autre définition. Il nous semble que cet énoncé, qui exige assez d'attention de la part de l'élève pour être d'abord nettement conçu, et qui d'ailleurs pourrait embarrasser dans un cas, comme on l'a fait observer à l'auteur, n'offre pas assez d'avantages pour être préféré. Il nous a paru aussi que les

propriétés des rapports et des proportions auraient trouvé plus naturellement place avant les règles de trois, de société, etc., et que leur théorie devient indispensable même aux personnes qui veulent se borner au calcul numérique. Nous pouvons nous tromper en faisant ces observations, mais non pas en regardant l'ouvrage de M. *Noël* comme utile à l'enseignement, et méritant sous tous les rapports d'être mis entre les mains des jeunes gens qui se destinent à l'étude des sciences mathématiques.

A. Q.

Algèbre élémentaire, raisonnée et appliquée par J. N. Noel, *professeur des Sciences Physiques et Mathématiques à l'Athénée Royal de Luxembourg, etc. Metz,* 1820.

L'auteur, tout en développant les principes qu'on rencontre dans les traités d'Algèbre élémentaire, a trouvé moyen d'y faire entrer encore quelques théories qu'on fait dépendre ordinairement de calculs plus relevés. C'est ainsi, par exemple, qu'il montre d'une manière très-simple comment, dans le plus grand nombre de cas, on peut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une variable. M. *Noël* emploie fréquemment une notation commode qui consiste à numéroter les lettres, et qui lui paraît avec raison offrir plusieurs avantages. Il entre dans de grands détails sur les séries numériques finies, sur les séries binominales, exponentielles et logarithmiques; et résout, par leur moyen, quelques problèmes intéressans de Géométrie et de Mécanique. L'auteur a mis dans cet ouvrage comme dans tous les autres de sa composition, un grand nombre de problèmes dont quelques-uns sont entièrement résolus, et dont la solution des autres est seulement indiquée.

L'auteur appelle *numéro* ou *indice* d'une lettre, le nombre écrit à la droite et un peu au-dessous : le nombre indique quel rang la quantité représentée par la lettre, tient dans une suite de quantités de même nature qu'elle. Ainsi, dans une suite de quantités, toutes

désignées par x, le terme x_ν, qu'on énonce x, ν^{ieme}, sera le ν^{ieme}, et ν sera le nombre ou l'indice de x. Cette notation n'est pas nouvelle; mais personne, que je sache, dit l'auteur, ne l'a appliquée en algèbre à la résolution des équations qui lient entre eux x^ν et $x_{\nu+1}$, c'est-à-dire, deux x consécutifs quelconques (1).

Résoudre une équation de ce genre, c'est en déduire x_n, *au moyen de* x_1 *et de quantités données. Ainsi l'équation*

$$px_{\nu+1} = qx_\nu + r$$

donne

$$x_n = \frac{r}{p-q}\left[\ x_1 - \frac{r}{p-q}\right]\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

Si l'on avait l'équation plus compliquée

$$x_{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+2}\ x_\nu + \frac{a\nu}{\nu+1}$$

on y ferait successivement $\nu = 1, 2, 3, 4$, etc. ensuite on substituerait successivement chaque valeur résultante dans celle qui suit immédiatement. On trouverait ainsi

$$x_3 = \frac{2}{3.4}\ x_1 + \frac{a}{3.4}(2 + 2.3)$$

$$x_4 = \frac{2}{4.5}\ x_1 + \frac{a}{4.5}(2 + 2.3 + 3.4)$$

Les applications nombreuses que l'auteur a faites de cette méthode dans ses divers ouvrages, en prouvent l'utilité.

M. *Noël* n'ayant point traité de la résolution des équations d'un degré supérieur, nous avons lieu de croire qu'il s'occupera de cette partie dans un autre ouvrage, que l'on pourra regarder comme la partie complémentaire de son Algèbre.

A. Q.

---

(1) *Voyez* encore les Mélanges math. de M. *Noël*, dont nous rendrons compte.

Elementa Geometriæ in usum prælectionum, novo ordine digesta : F. J. Goebel, *in Acad. Lovan. ord. disciplinarum Math. prof.* 1823, *in-8.°*

Ces élémens de Géométrie destinés à servir de texte aux leçons que donne M. *Goebel* à l'Université de Louvain, renferment encore des notions élémentaires sur la théorie des projections; on y trouve aussi un abrégé des trigonométries rectiligne et sphérique, bien suffisant pour les élèves qui n'ont besoin que des formules qui donnent la résolution des triangles.

L'auteur regarde les parallèles ou *équidistances*, comme des droites qui ne sont point inclinées l'une par rapport à l'autre, quoique prolongées à une distance infinie, *in infinitum licet productæ.* Ceux qui prennent à cœur la théorie des parallèles, ou, comme le dit *Montucla*, les amateurs de la belle synthèse, trouveront peut-être que M. *Goebel* entre ensuite un peu brusquement en matière : pour nous, nous convenons cependant que si, en saine logique, la théorie des parallèles laisse encore à désirer jusqu'à présent, les élèves du moins ne s'en aperçoivent guères, et ne se trouvent jamais arrêtés par cette prétendue difficulté. M. *Goebel* tâche encore d'applanir le passage de la mesure des polygones réguliers à celle du cercle ; et il en use de même pour toutes les propositions que *Lacroix* cherche à démontrer par une méthode rigoureuse et uniforme, mais un peu longue : la démonstration que donne l'auteur a beaucoup de rapport avec celle qu'on trouve dans la deuxième édition de la Géométrie de M. le professeur *Garnier*.

A. Q.

Annonces *des Ouvrages et Mémoires étrangers.*

Le 1.er n.° du tome XVI des Annales de Mathématiques de Nismes, vient de paraître : il contient un beau mémoire de M. *Gergonne*,

ayant pour titre : *Recherches d'analyse sur les surfaces caustiques.* Cet habile Géomètre commence ainsi : « Dans un article inséré » à la page 354 du précédent volume, nous avons démontré, d'après » les idées que nous avait suggérées un travail de M. *Quetelet,* quel- » ques propriétés générales des caustiques, et nous avons promis » de montrer dans un autre article, par des applications variées, » combien la connaissance de ces propriétés pouvait faciliter la » recherche de ces sortes de courbes ; mais il nous a paru qu'avant » de remplir cet engagement, il convenait d'abord de compléter la » théorie, en démontrant pour les surfaces caustiques, des théo- » rèmes analogues à ceux qu'offrent les caustiques planes, et tel est » l'objet unique de l'article qu'on va lire ».

M. *Gergonne* termine ce mémoire par ces mots : « Le peu qui » précède peut donc à la rigueur remplacer et le grand travail de » *Malus*, et l'extension remarquable qu'il a reçue entre les mains » de M. *Dupin*, et le long article que nous venons de rappeler » (XIV[e] vol. des Annales), et enfin celui que nous avons récemment » publié sur les caustiques planes, de sorte qu'il ne nous restera » plus maintenant qu'à offrir des applications variées de nos for- » mules ». En Géomètre tout plein de son sujet, M. *Gergonne* propose ce problème d'optique : *Lorsque les rayons solaires pénètrent obliquement dans une tasse de porcelaine blanche, il se forme au fond de la tasse une caustique bien prononcée. On propose de trouver l'équation de cette courbe.*

Nous nous serions abstenus de remercier M. *Gergonne* de l'annonce qu'il a bien voulu insérer à la fin de ce numéro, si elle n'était, au moins, aussi honorable pour notre pays que pour les collaborateurs de la *Correspondance*. « Les estimables éditeurs de cet » utile recueil, dit M. *Gergonne*, en annonçant, il y a quelques » mois, qu'il serait principalement consacré à l'analyse des travaux » des élèves des Universités du Royaume des Pays-Bas, ont pu faire » craindre aux hommes peu au courant de l'état de l'enseignement » dans ce Royaume, que leur *Correspondance* ne fût consacrée, en » grande partie, qu'à des théories tout à fait élémentaires, peu » propres conséquemment à intéresser les hommes familiarisés avec » ce que la science a de plus élevé. Mais ceux qui, comme nous, » auront parcouru les deux premières livraisons qui viennent de

» paraître, en voyant à quel point *les études mathématiques sont* » *fortes* dans la patrie d'*Adrianus Romanus*, de *Ludolphe*, de » *Tschirnhausen*, de *Grégoire de S.t-Vincent*, de *Huddes*, de *Huy-* » *ghens*, de *Sgravesande*, de *Snellius*, de *Simon Stévin*, etc., seront » complétement détrompés, et n'hésiteront point à placer ce recueil » à côté de *notre Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, en lui » désirant toutefois une durée moins éphémère. Nous saisirons avec » empressement toutes les occasions de faire connaître à nos lecteurs » ce que cet intéressant recueil pourra offrir de plus propre à piquer » leur curiosité ». C'est parce que nous connaissions ces préventions contre l'état de l'enseignement des sciences dans ce pays, que nous avons cru devoir entrer dans l'examen détaillé des mémoires couronnés, examen que nous étendrons aux thèses sur les sciences, et qui nous a paru le moyen le plus propre à fixer l'opinion des savans et des professeurs étrangers sur cette partie qu'ils croyaient encore dans l'enfance chez nous. Si quelques personnes nous ont accusés d'être *laudatifs*, c'est que, sans doute, elles auront pris pour *louangerie* ce qui est encouragement, et encore l'éloge n'était-il adressé qu'à des élèves qui donnaient des espérances, et que nous voulions retenir dans une carrière, celle de l'enseignement, qu'ils devaient parcourir avec honneur : d'ailleurs nous avons censuré ce qui devait l'être, et on doit observer qu'en fait de mémoires couronnés, nous ne devons pas trop nous écarter du respect pour la chose jugée. Puisqu'enfin notre recueil a franchi la frontière, nous devons désirer qu'il contribue de plus en plus à dissiper ces préventions que nous avons été assez heureux pour détruire en partie; c'est pour atteindre ce but, l'objet de nos vœux, que nous ferons un nouvel appel à ceux de nos compatriotes qui cultivent les sciences, et que nous rappelons à MM. les savans du Nord, l'engagement que nous avons pris de traduire soigneusement les mémoires qu'ils voudront bien nous adresser en langue nationale.

LES ÉDITEURS.

Le IX.e tome des Nouveaux mémoires de Pétersbourg, vient de paraître; et ce qui étonnera un grand nombre de lecteurs Géomètres, c'est qu'on y trouve encore en tête de la section mathématique, six mémoires posthumes d'*Euler*. Ainsi quarante ans après la mort de ce patriarche de la science, l'Académie de Pétersbourg, exploite encore le riche héritage de ses manuscrits. Ces mémoires ont pour titre :

1.° *De tribus, pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum; quadratorum vero summa, sit biquadratum.*

2.° *Resolutio facilis quæstionis difficillimæ qua hæc formula maxime generalis* $v^2z^2(ax^2+by^2)^2+\Delta x^2(av^2+bz^2)^2$ *ad quadratum reduci postulatur.*

3.° *De problemate curvarum synchronarum, ejusque imprimis inverso.*

4.° *Methodus nova et generalis problema synchronorum inversum, aliaque ejusdem generis resolvendi.*

5.° *De curvis quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiæ a puncto fixo, earum que mirabilibus proprietatibus.*

6.° *De unciis potestatum binomii, earumque interpolatione.*

Dans un ouvrage de M. *Villot*, ayant pour titre : *Origine astronomique du Jeu des Échecs, expliqué par le Calendier égyptien*, in-8.° de 87 pag. avec fig. Paris 1825, on trouve une solution complète et très-simple de ce problème de chronologie : *Trouver le nom du jour de la semaine qui répond à une date quelconque d'une année proposée dans tous les siècles.* Quelque opinion qu'on prenne du mémoire de M. *Villot*, si l'on se refuse aux conclusions qu'il tire de ses combinaisons, on ne peut, du moins, se refuser à reconnaître que les rapprochemens qu'il fait, ne soient piquans.

Euler et ensuite *Lagrange* ont traité, en passant, le problême du mouvement des corps qui s'attirent en raison directe de leurs distances, parce que cette question n'est que de pure curiosité : ils ont remarqué que la trajectoire était une ellipse dont le centre coïncidait avec celui d'attraction. M. l'Astronome *Littrow* a eu la patience

de reprendre la même question et d'en donner l'analyse complète (Eph. Ast. de Milan, 1824—1825) : cette analyse, remarquable par son élégance, mais modelée sur celle de la mécanique analytique, ne renferme aucune observation nouvelle, si ce n'est que, dans un tel système d'attraction, tous les corps planétaires acheveraient leurs révolutions en temps égaux.

Solution de la question 27.e proposée dans le n.o de mars (*Newcastle Magazine*, mai 1824, pag. 255). La question dont il s'agit, est énoncée en ces termes : *La distance périhélie d'une comète, est la moitié de la distance de la terre au soleil; son orbite qui est parabolique et celle de la terre, qui est supposée circulaire, sont dans le même plan; on demande combien de jours la comète est dans l'intérieur de l'orbite de la terre.* Suivant les calculs de M. A. C. de *Newcastle*, la comète doit employer 37 j. 7 h. à parcourir l'arc de son orbite, entre le périhélie et l'un des points où son orbite coupe celle de la terre : par conséquent il se passe 74 j. 14 h. depuis l'instant où elle entre dans l'orbite de la terre, jusqu'à celui où elle en sort.

(*Bull. des Sc. Math.*, n.o 5, mai 1825). J. G. G.

Problêmes et Développemens sur diverses parties des Mathématiques par M. Reynaud, *examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, et* Duhamel, *ancien élève de cette école.* un vol. in-8.o avec 11 planches, Paris. Suivant M. *Francœur*, ce livre n'est qu'une compilation dont l'étude n'est pourtant pas sans intérêt. Nous croyons M. *Francœur* sur parole.

Mémoire sur quelques constructions graphiques des orbites planétaires, par A. Quetelet. On trouve dans l'Astronomie de *Biot* et dans celle de *Delambre* la solution de ce problême : *Déterminer trois élémens de l'orbite d'une planète, par trois observations de cet astre.* Mais, long-temps auparavant, M. *Bouvard* avait étendu cette question à quatre élémens et à un égal nombre d'observations; ce savant Astronome avait développé tous les calculs et appliqué les formules

à un exemple tiré de l'orbite solaire : c'est ce même sujet que M.r *Quetelet* traite à son tour : il donne outre la théorie de M. *Bouvard*, diverses constructions graphiques propres à faciliter la recherche des équations, et il applique ces considérations au mouvement des planètes et des comètes. On lira ce mémoire avec intérêt : son savant auteur y donne une nouvelle preuve de zèle et de talent (1).

(*Extr. de la Revue*, juin 1825. FRANCOEUR.)

J. G. G.

De la chaleur considérée dans ses applications aux Arts et Manufactures, par A. BULOS, 1 *vol. in-12; Paris*, 1825.

Je n'ai point eu, dit l'auteur, la prétention de faire un ouvrage sur la chaleur; je n'ai voulu que réunir dans un même volume les résultats que l'expérience a consacrés. J'ai puisé dans *Parker*, dans *Chaptal*, dans *Robertson* et surtout dans *Fredgold* dont j'ai employé presqu'en entier le beau travail (2) : je ne voulais rien m'approprier; j'empruntais sans scrupule. Les savans que je viens de nommer, peuvent donc être considérés comme les véritables auteurs de cet écrit, aux fautes près qui m'appartiennent tout entières. De pareils aveux seraient de nature à désarmer la critique la plus sévère. Mais nous nous bornons à annoncer l'existence de ce livre.

J. G. G.

---

(1) Voyez le précédent n.° de la Correspondance.

(2) Ce travail a été analysé dans les derniers numéros de la Bibliothèque Universelle de Genève.

Application de l'Algèbre à la Géométrie par M. Bourdon, *inspecteur de l'Académie de Paris, docteur ès sciences, etc.* 1 *vol. in-8.° de* 624 *pages; Paris*, 1825.

La grosseur démésurée de ce volume s'explique, quand on apprend que la Géométrie analytique proprement dite, est précédée de deux chapitres très-étendus dont le premier a pour titre : *Développement d'une première méthode pour résoudre les questions de Géométrie par le calcul;* et le second renferme *les deux trigonométries*. L'auteur de cet ouvrage a publié tout récemment *des Elémens d'Arithmétique;* et, en 1820, il a donné une seconde édition de ses Elémens d'Algèbre. Ces ouvrages dus à un professeur distingué, et publiés à la suite d'un grand nombre d'autres Traités recommandables sur les mêmes matières, ne peuvent qu'être lus ou au moins consultés avec fruit par ceux qui se proposent encore d'écrire des Elémens.

J. G. G.

Traité de Mécanique élémentaire par L. B. Francoeur, *auteur de l'Uranographie, etc.* 1 *vol. in-8.° de* 524 *pages, cinquième édit. Paris,* 1825.

Puisque cet ouvrage est arrivé à sa cinquième édition, nous sommes dispensés d'en dire du bien; nous observerons seulement qu'il ne faut pas le lire à la suite de celui de M. *Poisson*, parce qu'on saurait déjà tout ce qu'il contient : mais il pourra servir de préparation à la lecture des ouvrages de MM. *Poisson* et *Prony*.

J. G. G.

Programme des prix proposés par l'Académie Royale des Sciences de Paris, pour les années 1826 *et* 1827.

Prix de Mathématiques, proposé en 1824, *remis au concours pour l'année* 1826.

Méthode pour le calcul des perturbations du mouvement elliptique des comètes, appliquée à la détermination du prochain retour de la comète de 1759, et au mouvement de celle qui a été observée en 1805, 1819 et 1822.

L'Académie a jugé qu'il était important d'appeler l'attention des Géomètres et des Astronomes sur la théorie des perturbations des comètes, afin de donner lieu à un nouvel examen des méthodes connues, et à deux applications principales dont les élémens sont très-différens et qui offrent l'une et l'autre beaucoup d'intérêt.

Le prix sera une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs :* il sera décerné dans la séance publique du premier lundi du mois de juin 1826.

Prix de Mathématiques, proposé en 1824, *remis au concours pour l'année* 1826.

L'Académie considère la théorie de la chaleur comme une des questions les plus importantes auxquelles on ait appliqué les Sciences mathématiques ; cette théorie a déjà été l'objet de plusieurs prix décernés, et les pièces que l'Académie a couronnées, ont beaucoup contribué à perfectionner cette branche de la physique mathématique. L'Académie avait proposé la question suivante pour objet du prix de Mathématiques, remis au concours :

1.° Déterminer par des expériences multipliées, la densité qu'acquièrent les liquides et spécialement le mercure, l'eau, l'alcool et l'éther sulfurique, par des compressions équivalentes au poids de plusieurs atmosphères.

2.° Mesurer les effets de la chaleur, produits par ces compressions. Le prix sera une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*: il sera décerné le premier lundi du mois de juin 1826.

Prix d'Astronomie.

La médaille fondée par M. *de Lalande*, pour être donnée annuellement à la personne qui, en France ou ailleurs (les membres de l'Institut exceptés), aura fait l'observation la plus intéressante, ou le mémoire le plus utile aux progrès de l'Astronomie, sera décernée dans la séance publique du premier lundi de juin 1826. Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *six cent trente-cinq francs*.

Questions proposées par la Faculté des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Université de Liège.

I.

Montium altitudines ubique terrarum, barometri ope, metiendi methodus, principiis e Physica et Mathesi petitis, quantum licet, maxima cum perspicuitate et evidentia, superstruatur. Ostendatur etiam quid de præstantia hujus methodi cum cautelis adhibitæ, experientia docuerit (cette question est remise au concours).

II.

Quæritur historia succincta præcipuorum systematum mineralogicorum, et quid horum systematum optimum sit, dijudicatio.

III.

Exponatur acidorum mineralium in substantias organicas accurate agendi ratio, atque speciatim ætherum illustretur compositio.

Questions proposées par la Faculté des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Université de Louvain.

I.

Axes coordinatarum orthogonalium sibi sunt ad perpendiculum in puncto A, ubi ponitur earum origo; in axe ordinatarum y inde a puncto A sursum usque ad punctum F, pars $AF = a$ capitur; ex hoc deinde puncto F in axem abscissarum x emittitur linea recta FB, ad quam ex puncto intersectionis B et axis abscissarum perpendicularis recta CBD erigitur : in qua si utraque ex parte sumitur $BC = BD = AB$, extremitates C et D in linea jacent curva cujus natura subsidio æquationis inter coordinatas exhibitæ, penitus est investiganda.

II.

Exponatur Cerevisias generatim et speciatim Belgicas elaborandi methodus. Quænam est hujus operationis theoria profecto chemica? Quænam est causa cur, manente eadem compositione, pro variis locis variæ exsurgunt Cerevisiæ, vel potius, quare, eodem quidem adhibito processu et iisdem assumptis ingredientibus, Cerevisiæ quædam ubique, aliæ vero dumtaxat in urbium quarumdam ambitu, parari possunt?

III.

Repetendam esse statuit ordo quæstionem anno priori his verbis propositam : Detur accurata descriptio plantarum officinalium et venenatarum, tum phanerogamarum tum cryptogamarum, in agro Lovaniensi sponte crescentium, addita earum historia. Indicentur characteres præcipui tam familiarum naturalium quam classium Linnæi quo referuntur; deinde ostendantur earum proprietates, loci natales, inflorescentiæ tempus, usus medici et œconomici, ac denique doceatur quibus illæ notis differant a plantis quibuscum facile possunt confundi.

Questions proposées par la Faculté des Sciences de l'Université de Gand.

I.

Exstat quoddam in Mechanica generale principium ex quo petitur solutio problematum circa motum cujusvis corporum systematis : hujus principii enuntiatio, demonstratio et nonnullæ applicationes requiruntur.

II.

Novo et scrupuloso examini subjicere legem *Coulombianam* qua asseritur repulsionem electricam et attractionem magneticam semper esse in ratione inversa quadrati distantiæ.

III.

Quæritur descriptio structuræ anatomicæ et expositio historiæ naturalis lumbrici vulgaris, sive terrestris.

OBSERVATION.

Pag. 181. On sait que *dans tout quadrilatère inscrit* (*fig.* 15), lisez : que dans tout quadrilatère inscrit *fig.* 15 (*a*). La propriété énoncée s'applique à tout quadrilatère inscrit; mais on suppose ici que par le sommet C du triangle inscrit ACB, on a mené le diamètre CD, en sorte que CD et AB représentent les deux diagonales du quadrilatère ACBD que nous considérons.

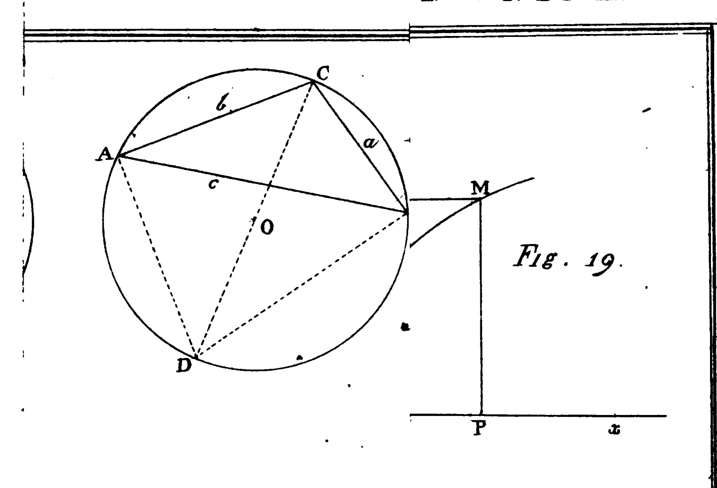
Question à résoudre (1).

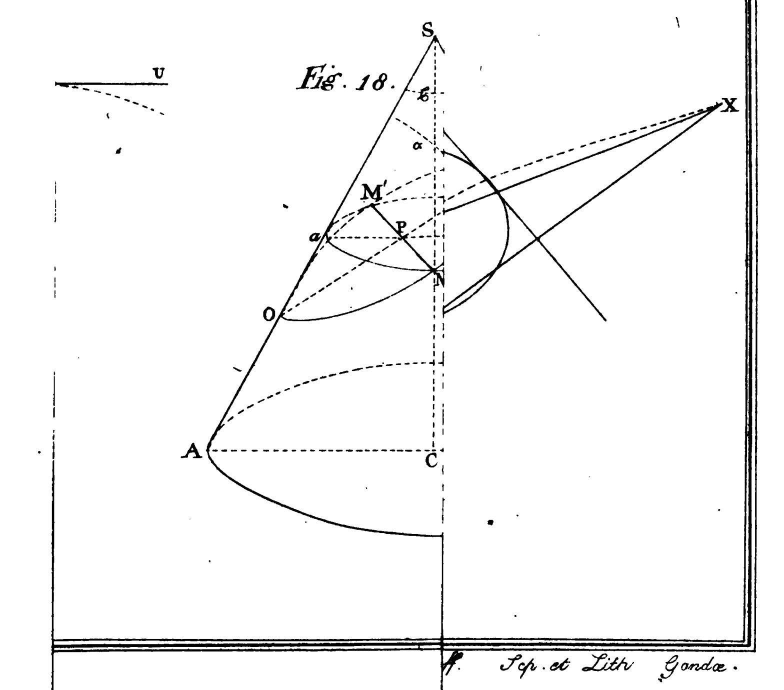
Déterminer les pieds des normales abaissées d'un point quelconque P (*fig.* 20) sur le contour d'une section conique donnée O, ou, en d'autres termes, déterminer les points de la courbe, qui sont les plus ou les moins éloignés de P.

Ayant mené une tangente TM en un point quelconque T de la courbe, et le diamètre indéfini TO qui passe par le centre O de la courbe, et du point P une perpendiculaire indéfinie PK sur cette tangente, cette perpendiculaire rencontrera le diamètre PO en un point X qui variera avec la position de la tangente TM, en parcourant une certaine courbe dont les points d'intersection avec la proposée, seront évidemment les points demandés. On trouvera dans l'ouvrage de *Marc-Laurin*, ayant pour titre : *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, des recherches très-curieuses sur cette courbe, et, en général, sur les courbes décrites par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les diverses tangentes d'une courbe géométrique quelconque.

(1) Nous donnerons dans le prochain numéro, les solutions qui nous sont parvenues, en réponse aux questions proposées dans les numéros précédens.







Sep. et Lith Gandæ.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Rectification approchée de la circonférence.

Souvent, dans les arts, on se trouve dans la nécessité de construire la longueur d'une circonférence rectifiée, dont le diamètre est connu; dans l'impossibilité de résoudre rigoureusement cet important problême, on a imaginé des méthodes d'approximation plus ou moins expéditives. Celle que je propose ici, pourra paraître assez simple; elle porte l'approximation jusqu'aux dixmillièmes (1).

Soit (*fig.* 21) un cercle du diamètre $BA = D$; à partir du point B dans lequel le cercle touche la ligne indéfinie BR, on prend $Ba = \frac{D}{4}$, on porte D trois fois bout à bout de B en D'', et $aR = 15aB$; en a on élève la perpendiculaire $am = BA = D$, on tire Rm qui coupe BA en c : enfin on mène $D''c$ qui représente la circonférence du diamètre BA.

(1) Elle a été insérée dans les notes de la 2.e édition de la Géométrie de M. *Garnier*, qui a paru en 1818, chez *Houdin*, à Gand, et qu'on trouve chez *De Mat*, à Bruxelles.

D'abord les triangles semblables RBc et cmn donnent la proportion

$$mn : nc :: ma : aR, \text{ d'où } mn = Ac = \frac{nc.ma}{aR} = \frac{aB.D}{15\,aB} = \frac{D}{15}$$

donc $Bc = BA - Ac = \frac{15D}{15} - \frac{D}{15} = \frac{14D}{15}$. Actuellement le triangle rectangle $D''cB$ donne

$$D''c = D\sqrt{\left(\frac{14}{15}\right)^2 + 9} = \frac{D}{15}\sqrt{2025 + 196} = \frac{D}{15}\sqrt{2221} = 3{,}1418$$

résultat exact jusqu'au dernier chiffre.

A. Q.

Problême d'arpentage.

Le problême suivant qui peut trouver son application dans l'arpentage, a été extrait d'une description d'une équerre à miroirs, par M. *Lipkens*, de laquelle il sera fait mention par la suite.

Problême. *Soit proposé de trouver la ligne* VA *qui partage l'angle* ZAY *en deux parties égales, sous la condition qu'on ne pourra mesurer aucune ligne.*

« *Solution.* Au point B (*fig.*22) pris à volonté sur le côté ZA, je place un jalon, et je détermine la direction BC faisant un angle de 45 degrés avec BA; en A j'élève une perpendiculaire à AB, et au point C où cette perpendiculaire coupe la ligne BC, je place un second jalon; je cherche ensuite sur le prolongement de ZA, le point D où l'angle ADC est également de 45°, ce qui donne DA = AB; après avoir placé un troisième jalon au point D, je viens sur le côté AY de l'angle donné, déterminer le point X où les lignes DX et XB sont perpendiculaires; enfin sur la ligne XB, je cherche le point V auquel aboutit la perpendiculaire passant par A, et ce point déterminera la ligne qui partage l'angle ZAY en deux parties égales. »

« La solution de ce problême qui est fondée sur ce que l'angle DXB est un angle droit qui peut être considéré comme ayant son sommet à la circonférence dont DB est le diamètre, et par conséquent AB et AX des rayons égaux, m'avait infructueusement occupé, lorsque M. *Von Prangen*, major du génie au service de S. M. le roi de Danemarck, à qui je l'avais proposé, a trouvé la seule méthode que je crois exister, pour la résoudre (1). »

A. Q.

---

(1) M. *Servois*, professeur de Mathématiques aux Ecoles de France, a publié un ouvrage très-curieux ayant pour titre : *Solutions peu connues de différens problêmes de Géométrie pratique*. C'est un travail utile, dit ce Géomètre, que de présenter un recueil de méthodes où tout est résolu avec de simples *piquets* ou *jalons*, avec le *cordeau* ou la *chaîne*, etc., ou, tout au plus, avec l'*équerre d'arpenteur* : cet excellent opuscule est divisé en deux parties : la première intitulée *Théorie*, renferme des théorèmes qu'on ne trouve pas dans les Elémens de géométrie; la seconde partie qu'il appelle *Pratique*, offre seize problêmes très-intéressans parmi lesquels on trouve les deux suivans : 1.° *Diviser un angle accessible en deux parties égales.* 2.° *Diviser un angle inaccessible en deux parties égales.* Il termine par un exposé rapide des principaux usages de l'*équerre d'arpenteur*, instrument, dit l'auteur, trop négligé en France et mieux apprécié par les étrangers, dont le principal mérite est, comme on le verra, de fournir les moyens de repéter indéfiniment le même angle, mérite qu'il partage avec la *fausse équerre*, ou tout instrument composé de deux branches formant un angle quelconque. Nous pourrons extraire de ce recueil, au profit de la Correspondance, quelques-unes des solutions les plus curieuses.

J. G. G.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Sur l'emploi des projections stéréographiques en Géométrie, par M. G. DANDELIN, *professeur Ext. à l'Université de Liége.* (*Extrait par* A. QUETELET.)

Les projections stéréographiques forment une espèce particulière de perspective, dans laquelle l'œil est assujetti à se placer d'une certaine manière par rapport aux objets vus : c'est ainsi que dans nos cartes géographiques qui sont de véritables perspectives des différentes parties de la terre, l'œil est supposé placé à la superficie du globe, et le plan du *tableau* parallèle à l'horizon visuel.

Les projections stéréographiques étaient connues des anciens géomètres ; mais l'heureux emploi qu'en a fait M. *Dandelin*, semble en former une partie entièrement nouvelle, et d'autant plus importante, qu'elle résout avec autant de facilité que d'élégance, une foule de problêmes presqu'inabordables par la Géométrie ordinaire. Un pareil éloge pourrait être suspect dans la bouche d'un ami ; mais il suffira de lire cet extrait, pour juger à quel ordre de Géomètres appartient M. *Dandelin*.

Nous commencerons par poser quelques notions préliminaires, indispensables pour l'intelligence de ce qui doit suivre.

1. On nomme lignes *concourantes*, les lignes qui, sur un plan, ou dans l'espace, se dirigent toutes vers un même point; d'où il suit que les parallèles sont aussi des lignes concourantes, mais dont le point de concours est à l'infini.

Les perspectives des lignes concourantes, sont également des lignes concourantes.

Lorsque plusieurs faisceaux de lignes concourantes ont leurs divers points de concours sur une même droite, les perspectives de ces lignes concourantes jouiront d'une propriété semblable. Si la droite des points de concours, se trouve dans un plan passant par l'œil et parallèle au tableau, la perspective sera composée de lignes parallèles. (Voyez le suppl. à la Géom. descr. de *Monge*, par *Brisson*.)

2. La perspective d'une courbe plane sur un tableau parallèle à son plan, est une courbe semblable à la première.

3. Si l'on conçoit une série de cônes tangens à une sphère et ayant leurs sommets sur une ligne droite M, les lignes de contact seront des circonférences dont les plans se couperont tous selon une ligne droite N qui joindrait les deux points de contact des deux plans tangens à la même sphère et à la série des cônes. Si alors on abaisse du centre de la sphère une perpendiculaire sur la droite M, et si l'on fait tourner le système autour de cette perpendiculaire, la sphère tournera sur elle-même, les droites M et N engendreront deux plans parallèles, et le point A où l'axe coupe le plan engendré par N, est tellement situé qu'il appartiendra à la fois aux plans de toutes les circonférences selon lesquelles la sphère sera touchée par les cônes qui ont pour sommets les différens points du plan *a* engendré par la droite M dans sa révolution.

Nous appellerons le point A le *pôle* du plan *a*, et le plan des sommets, sera le *plan relatif* au point qui lui sert de pôle. Nous continuerons dans ce qui suit à désigner le pôle par une lettre majuscule, et le plan par la minuscule correspondante.

Nous devons prévenir aussi qu'un point, ou un système de points, désigné par une lettre, sera, en perspective, marqué de la même lettre, avec un ou plusieurs accens, suivant qu'il sera du premier, du second, etc., système de perspective. Ainsi, la perspective du

point a sera a'; si l'on considère un second système de perspective, sa perspective sera a'', et ainsi de suite. La perspective du cercle a sera également a'.

Il est à remarquer que quand le plan coupe la sphère, son pôle est à l'extérieur de la sphère; dans le cas contraire, le pôle est dans l'intérieur : quand le plan est tangent, le pôle est au point de contact.

4. Il est évident que le pôle du plan d'un cercle, tracé sur la sphère, est le sommet du cône droit qui touche la sphère suivant ce cercle. Ainsi, nous appellerons ce sommet, pôle du plan du cercle, ou simplement pôle du cercle. Un plan est donc le lieu des pôles de toutes les sections planes qui passent par son pôle.

5. L'intersection de deux plans est une ligne droite, contenant les pôles d'un système de sections planes assujetties à passer par les pôles des deux plans, et conséquemment par la droite qui joint les deux plans : cette droite sera donc appelée la ligne *polaire*, relative à l'autre : deux droites sont réciproquement polaires l'une de l'autre. On voit par la même raison, que l'intersection de trois plans, est le pôle du plan passant par les pôles des trois autres.

6. Pour généraliser les définitions, nous appellerons surface polaire relative à une autre surface, celle qui contient les pôles des plans tangens à cette dernière : il paraît inutile de démontrer que deux surfaces dans ce cas, sont réciproquement polaires l'une de l'autre.

7. Enfin, par analogie avec ce qui a lieu dans l'espace, nous appellerons sur le plan d'un cercle, pôle d'une droite, le point où se coupent toutes les cordes, tellement placées, que les tangentes menées au cercle par leur extrémité, se coupent deux à deux sur la droite.

On conçoit qu'en perspective, la perspective du pôle, sera le pôle de la perspective de la droite.

Si par le pôle d'un plan, on mène un plan de manière à ce qu'il coupe la sphère suivant un cercle, et le plan suivant une droite, cette droite aura pour pôle dans ce plan et par rapport à ce cercle, le pôle du premier plan.

Si par une droite quelconque on mène un plan qui coupe la sphère suivant un cercle, et la droite polaire relative à cette droite

suivant un point, ce point sera sur le plan et par rapport à ce cercle, le pôle de la première droite.

Par courbe polaire, relative à une autre courbe, nous entendrons aussi celle qui contient tous les pôles des droites tangentes à cette dernière. Celle-ci est à son tour la polaire de l'autre.

Théorèmes fondamentaux ; démonstration de quelques propriétés curieuses du cercle.

8. *Deux tangentes à la sphère, en un même point, sont vues ou se projettent stéréographiquement selon deux droites faisant entre elles le même angle, que les deux tangentes.* En effet, par l'œil et par les deux tangentes menons deux plans : ils couperont la sphère suivant deux cercles, et le plan du tableau suivant deux droites, qui seront les perspectives ou les projections de ces deux tangentes ; mais ces deux droites seront évidemment parallèles aux deux tangentes menées par l'œil aux deux cercles ; ainsi leur angle sera égal à celui de ses deux tangentes ; mais celles-ci font entre elles le même angle que les deux premières. Donc, etc.

Un corollaire intéressant de cette propriété, c'est que deux courbes tracées sur la sphère, et qui se coupent sous un certain angle, se projettent suivant deux courbes planes, se coupant aussi sous le même angle. Quand deux courbes sont tangentes sur la sphère, elles se projettent stéréographiquement suivant deux courbes aussi tangentes.

9. *Un cercle tracé sur la sphère, est vu où se projette stéréographiquement suivant un autre cercle dont le centre est la projection du pôle du premier.*

Soit un cercle c tracé sur la sphère, et C son pôle : menons une des génératrices du cône tangent à la sphère, suivant le cercle c. Cette génératrice passera par C, et coupera perpendiculairement l'élément du cercle c, par lequel elle passe. Projetons stéréographiquement tout le système : il est clair que le cercle c se projettera suivant une courbe qui aura la propriété de couper à angles droits toutes les droites menées sur le tableau par la projection C' du pôle C. Cette courbe sera donc un cercle dont le centre sera C'.

Les deux théorèmes précédens, déjà connus des anciens géomè-

tres, vont donner lieu à des applications fort ingénieuses et formeront avec un troisième qui sera exposé plus loin, les bases d'une théorie qui présente de la manière la plus simple toutes les propositions les plus importantes de la Géométrie. Le besoin de méthodes nouvelles se fait sentir depuis que le domaine des sciences s'étend de jour en jour, et qu'on voit la nécessité de rattacher les plus importantes découvertes à quelques principes simples. Des essais heureux ont déjà été tentés; la théorie que nous allons indiquer ne paraîtra pas une des moins intéressantes : nous doutons au moins qu'il y en ait une qui offre plus de concision et d'élégance.

Désormais quand un plan coupera une sphère, nous le désignerons par les lettres du cercle d'intersection : ainsi le plan c, ou le cercle c, seront la même chose puisque l'un détermine rigoureusement l'autre.

10. *Soit un cercle avec les quadrilatères inscrit et circonscrit* abdc, efgh; *menons les quatre diagonales* ad, bc, eg, fh; *elles se croiseront au même point* i (fig. 23 et 24).

Concevons une sphère dont le cercle *abdc* serait une section : puis par l'intersection i des diagonales du polygone inscrit et par le pôle du cercle, menons une droite; elle coupera la sphère en deux points. Plaçons l'œil à l'un d'eux, nous verrons la figure 24 dans laquelle le point i' se confond avec le centre du cercle $a'b'c'd'$; d'où il suit que le quadrilatère inscrit $a'b'c'd'$ est un rectangle et que par conséquent toute la figure est symétrique par rapport à la diagonale $f'h'$; delà résulte que les quatre diagonales sont concourantes et par suite les diagonales ad, bc, eg, fh; l'une de ces figures étant la perspective de l'autre.

De plus les lignes $c'd'$, $f'h'$, $a'b'$ étant parallèles et par suite concourantes, on voit que les trois droites cd, fh, ab le sont aussi ainsi que les droites ac, eg, bd. Enfin, puisque les huit droites $a'b'$ et $c'd'$, $a'c'$ et $b'd'$, $e'f'$ et $g'h'$, $e'h'$ et $f'g'$ sont parallèles deux à deux, il est clair que les droites qui leur correspondent dans l'autre figure, *forment quatre faisceaux de lignes concourantes deux à deux vers des points situés sur la même droite.*

11. Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. *Poncelet.* On voit que la méthode de M. *Dandelin* revient ici à comparer la figure qu'il se donne à une autre qui est la perspec-

tive de celle-là et qui prend une forme régulière pour une position particulière donnée à l'œil. On transporte alors les propriétés de la figure régularisée à l'autre dont on veut étudier les propriétés. Avant de passer outre, je vais citer les énoncés de quelques théorèmes curieux qui pourront mieux faire comprendre cette méthode. Il suffit, pour la démonstration, de supposer, comme l'a fait M. *Dandelin*, l'œil placé sur la droite qui joint le pôle du cercle, au point du concours des droites que nous allons considérer.

Théorème I. Soit un polygone d'un nombre de côtés pair inscrit, dont les n diagonales qui joignent les $2n$ sommets opposés, se coupent en un même point :

1.° Les n diagonales du polygone circonscrit, se couperont au même point;

2.° Les $2n$ côtés opposés du polygone inscrit, se couperont deux à deux, et les points d'intersection seront en ligne droite;

3.° Il en sera de même des $2n$ côtés du polygone circonscrit;

4.° Les diagonales semblablement opposées deux à deux, dans les deux polygones, se couperont encore sur la même droite.

Théorème II. Soit un polygone d'un nombre de côtés impair et circonscrit; si les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés, se coupent en un point, tous les côtés prolongés du polygone circonscrit et du polygone inscrit, se couperont avec toutes les diagonales et formeront n groupes renfermant chacun $n-1$ droites, et les points de concours seront en ligne droite.

Théorème III. Qu'on coupe le cercle par une ellipse et qu'aux quatre points d'intersection, on construise deux polygones inscrit et circonscrit au cercle et deux autres à l'ellipse; les deux premiers jouiront des propriétés énoncées au paragraphe 10, et les deux autres jouiront exactement des mêmes propriétés; de plus la droite de concours pour les côtés, et le point de concours pour les diagonales, sont communs, et les huit sommets des polygones circonscrits sont sur deux droites.

12. On démontrera encore facilement par ce qui précède le théorème de *Brianchon*, c'est-à-dire, que dans l'*hexagone circonscrit, les trois diagonales sont concourantes* : Il suffit de considérer d'abord

deux diagonales, et en régularisant la figure, on voit la nécessité que la troisième passe par le point de concours des deux premières.

Quant au théorème de *Pascal*, il se démontre par une autre considération très-simple.

Soit un cercle quelconque et un hexagone inscrit abcdef *: prolongeons les côtés opposés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent deux à deux en* g, h, i; *ces points seront en ligne droite.*

Concevons une sphère dont le cercle donné soit une section : par deux des trois points, savoir *g* et *h*, menons un plan tangent à la sphère et plaçons l'œil au point de contact. Dans ce système de projection, les points *g* et *h* étant sur un plan parallèle au tableau et passant par l'œil, leur perspective sera placée à l'infini § 1 : ainsi quatre des six droites qui composent l'hexagone, formeront des cordes parallèles et opposées deux à deux dans le cercle; d'où l'on pourra conclure, en suivant ce raisonnement au moyen d'une construction, que les deux derniers côtés formeront aussi des cordes parallèles. Les six cordes de l'hexagone $a'b'c'd'e'f'$ sont donc deux à deux concourantes à l'infini, d'où il résulte que les trois points de concours *g*, *h* et *i* sont situés en ligne droite.

12. Les deux théorèmes précédens donnent une relation entre six tangentes et six cordes dans le cercle, ou même dans les sections coniques : car en général tous les théorèmes précédens conviennent aux courbes du second degré : j'y ajouterai le théorème suivant qui exprime une relation entre trois tangentes et trois cordes. Il dépend en quelque sorte de la proposition II parag. 11.

Si l'on a un triangle inscrit et un autre circonscrit, les côtés opposés se coupent deux à deux en trois points qui sont en ligne droite, et en joignant les sommets opposés, les trois droites se coupent en un point. On pourrait énoncer la proposition plus simplement pour le polygone circonscrit, en disant : *les trois droites qui joignent les sommets d'un triangle circonscrit aux points de contact, se coupent en un point.*

J'énoncerai encore deux propositions qui se démontrent facilement par la méthode à employer pour le théorème de *Pascal.*

Theorème I. Si d'un point quelconque A (*fig.* 25) pris hors d'une droite BK, on mène à cette ligne tant d'autres droites AB, AC, AD, AE etc., qu'on voudra, et qu'ayant mené du point K une transversale

Kb, qui coupe toutes ces droites partant du point A en *b*, *c*, *d*, *e* etc.; on trace les diagonales B*c*, C*b*, C*d*, D*c*, etc. de tous les quadrilatères BC*cb*, CD*dc*, DE*ed* etc., je dis que tous les points de croisement *m*, *n*, *p* etc. des diagonales de chacun de ces quadrilatères, seront dans une même droite qui passera par le point K (1).

Théorème II. Si dans un quadrilatère inscrit, on prolonge les côtés, et si des deux points de rencontre, on mène quatre tangentes, puis quatre droites qui joignent les points de tangence, les douze droites formeront trois quadrilatères dont toutes les diagonales se couperont en un même point; de plus ce dernier point avec les deux points de rencontre primitifs et les quatre points de tangence, seront sur deux droites, et les côtés des trois quadrilatères concourent avec les diagonales des deux dernières en quatre points qui sont en ligne droite. Ce théorème peut devenir utile quand il s'agit de mener des tangentes aux sections coniques, car on voit facilement qu'il convient aussi à ces courbes (2).

13. Revenons au travail de M. *Dandelin*, et aux théorèmes précédens, ajoutons-en quelques autres que j'extrais de son beau mémoire. Il suffira de donner les énoncés; le mode de raisonnement étant toujours le même.

Théorème I. Dans l'étoile hexagonale dont les six rentrans sont sur une même circonférence, les trois diagonales qui joignent deux à deux les points opposés, se coupent au même point :

Théorème II. La même chose à lieu pour les trois diagonales qui joignent deux à deux les rentrans opposés d'une étoile hexagonale inscrite dans un cercle.

Si l'on projette sur la sphère les deux figures que donnent les théorèmes de *Pascal* et de *Brianchon*, on parviendra aux propositions suivantes qui nous ont été de la plus grande utilité à M. *Dandelin* et à moi, pour démontrer des propriétés très-curieuses d'une classe fort étendue de courbes : mais l'idée de ces propositions appartient à M. *Dandelin*.

Théorème III. Si sur la circonférence d'un cercle, on prend six

---

(1) *Carnot*, Théorie des transversales, théorème X.

(2) Voyez la Corresp. Math. 2.e cahier, probl. à résoudre.

points a, b, c, d, e, f et un septième g quelque part sur son plan, on pourra mener les cercles abg, bcg, cdg, deg, efg, fag et les intersections des cercles opposés, savoir : abg et deg, bcg et efg, cdg et fag se trouveront sur un septième cercle passant aussi par g.

Théorème IV. Si sur une circonférence on prend six point a, b c, d, e, f, et un septième quelque part sur son plan, on pourra mener par le point g six cercles tangens à la première circonférence en a, b, c, d, e, f : considérant ces six cercles comme un hexagone circonscrit, et menant par les sommets opposés trois cercles assujettis à passer par g, ces cercles se couperont en un même point.

14. Concevons maintenant deux plans fixes coupant la sphère, et un autre plan mobile qui la coupe également; on aura ainsi trois cercles sur la sphère, nous supposons que le dernier seulement coupe les deux autres; les trois plans formeront toujours un angle trièdre qui aura pour arêtes la ligne d'intersection des deux plans fixes, et les deux droites selon lesquelles ces mêmes plans sont coupés par le plan mobile; or ces dernières droites sont les cordes prolongées des deux cercles fixes avec le cercle mobile, et elles se couperont toujours sur la première : il en résulte donc qu'en projettant stéréographiquement le système;

Les couples de cordes appartenant en commun à deux cercles fixes et à un troisième variable, se coupent toutes deux à deux sur une même droite.

Quand les deux cercles fixes se coupent, leur corde est la droite dont il s'agit. Remarquons que cette droite sera toujours perpendiculaire à la droite qui joint les centres.

15. Imaginons maintenant trois cercles fixes; nous pourrons les regarder comme les projections de trois cercles déterminés sur la sphère par trois plans fixes qui se coupent selon trois arêtes concourantes au sommet de l'angle trièdre. Nous en déduirons encore ce théorème :

Un cercle variable qui coupe à la fois trois cercles fixes, a avec eux trois cordes communes, lesquelles forment un triangle dont les trois sommets sont situés constamment sur trois droites concourantes dont la position dépend des trois cercles fixes.

(La suite au numéro prochain.)

Analyse appliquée.

Sur les rapports qui existent entre la parabole et quelques courbes connues.

L'équation polaire de la conchoïde de *Nicomède* (*fig.* 26), quand on prend pour unité la plus courte distance PO du pôle à la droite qui sert de base, et qu'on représente par m le module bc de grandeur constante, est de cette forme :

$$\rho = \text{séc.}\ \varphi \pm m\ ;$$

mais quand on emploie les coordonnées polaires, on sait que la tangente et la normale en un point de la courbe, sont limitées par la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur; et que la sous-normale et la sous-tangente sont les projections de ces droites sur la même perpendiculaire. Or, le calcul différentiel enseigne que la valeur de la sous-normale Pd est alors $\frac{d\rho}{d\varphi}$; et cette sous-normale étant ainsi connue en grandeur et en direction, pourrait être considérée comme le rayon vecteur d'une autre courbe polaire Pd dont tous les points seraient les lieux des intersections des normales à la première avec leurs sous-normales respectives.

D'après cela, déduisons de l'équation précédente, la valeur de $\frac{d\rho}{d\varphi}$ ou ρ' qui sera le rayon vecteur de la nouvelle courbe : on aura

$$\rho' = -\frac{\sin.\ \varphi}{\cos.^2\varphi}$$

ce qui est l'équation polaire d'un parabole rapportée à son sommet. *La courbe des sous-normales à la conchoïde de Nicomède, est donc une parabole, ayant même axe que la conchoïde, ayant de plus son sommet au pôle de l'autre courbe et son paramètre égal à l'unité.*

Ce résultat assez curieux, est indépendant du module; or quand ce module est nul, la conchoïde se réduit à une droite Oc parallèle à la directrice. Ceci offre encore un moyen facile pour construire les tangentes à la conchoïde : qu'on mène en effet le rayon vecteur Pb de la conchoïde et sa perpendiculaire Pd ainsi que cd perpendiculaire à Oc; en menant alors du point d, les droites db et db', on aura les normales aux points b et b' de la conchoïde.

Nous allons énoncer encore quelques autres résultats que le lecteur pourra vérifier sans peine par le calcul, en prenant pour pôle son point double.

La courbe des sous-normales à la focale régulière, est encore une parabole : d'une autre part, les sous-tangentes d'une focale régulière (1), *sont les rayons vecteurs de la conchoïde circulaire ou de l'épicycloïde qui est la caustique du cercle éclairé par un point de la circonférence.*

L'équation polaire de la première de ces courbes, est

$$\rho = \sec.\varphi \pm \text{tang}.\varphi$$

pour la seconde, elle est

$$z = \left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 1 \pm \sin.\varphi.$$

M.r *Dandelin* a démontré dans le 2.e vol. des Mém. de l'Académie de Brux., que *la caustique d'une parabole éclairée par un point pris hors de son contour, est la développée d'une focale qui a pour nœud le point rayonnant.* Nous ajouterons que quand le point rayonnant est au sommet de la parole, *la caustique de cette parabole, est la développée de la cissoïde de Dioclès.* Ces résultats se déduisent sans peine du principe énoncée dans le premier cahier de la correspondance page 14.

L'équation polaire de la cissoïde est assez simple et elle ressemble aux équations de la conchoïde et de la focale : elle est, en prenant pour pôle le point de rebroussement :

$$\rho = \sec.\varphi - \cos.\varphi = \frac{\sin.^2\varphi}{\cos.\varphi}.$$

---

(1). Voyez le 2.e cah. de la Corresp. Math. pag. 82.

Cette ressemblance tient au mode de génération de ces courbes, qui est à-peu-près le même. En comparant l'équation de la cissoïde sous cette dernière forme, à celle de la parabole, on verra que quand ces deux courbes ont l'axe et le sommet communs, le produit de leurs rayons vecteurs est constant, par toute l'étendue des courbes, pour les mêmes angles.

Les projections stéréographiques des courbes précédentes ainsi que nous l'avons prouvé, M. *Dandelin* et moi, *sont les intersections d'une sphère et d'un cône :* ces courbes ont de plus des foyers qui jouissent de propriétés analogues à celles des foyers dans les sections coniques.

Je rappellerai ici à l'égard des sections coniques, une proposition que j'ai démontrée dans le 2.ᵉ vol. des mém. de l'Acad. de Brux. c'est qu'*une section conique a, outre ses deux foyers, un nombre infini d'autres foyers qui se trouvent sur une section conique, dans un plan perpendiculaire à celui de la première.* Pour la parabole, par exemple, les foyers sont sur une seconde parabole passant par le foyer de la première et ayant même paramètre. J'ai démontré dans le même mémoire que *tous les cônes droits qui ont pour base une section conique, ont leurs sommets sur une seconde section conique située dans un plan perpendiculaire à celui de la première;* ainsi le cône droit auquel peut appartenir une parabole donnée, a son sommet sur une autre parabole passant par le foyer de la première et ayant même paramètre. Cette dernière proposition peut servir à résoudre d'une manière simple le problême résolu à la page 194 du précédent cahier de notre Correspondance.

Je terminerai cet article par une remarque qui pourra être utile dans certains cas. On a pour valeur du rayon de courbure, en employant les coordonnées rectangulaires,

$$r = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

mais $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } \alpha$, α étant la tangente de l'angle que fait la

tangente à la courbe avec l'axe des x : donc

$$r = \frac{(\tang.^2 \alpha + 1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sec.^5 \alpha}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ ou bien } \sec.^5\alpha = r.\frac{d^2y}{dx^2}:$$

ce qui donne la proportion

$$r : \sec.\alpha :: \sec.^2\alpha : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

A. Q.

Montpellier, le 1.er juillet 1825.

Extrait d'une lettre de M. Gergonne, *rédacteur de Ann. math. de Nîmes.*

Voici comment je démontre, sans calcul, votre théorème pour les *courbes planes réfléchissantes* (voyez la note qui suit).

Soient décrits de tous les points de la courbe réfléchissante, comme centres, des cercles tangens à une trajectoire orthogonale quelconque des rayons incidens, et soit décrite l'enveloppe de tous ces cercles.

Considérons deux quelconques d'entre eux dont les centres, sur la courbe réfléchissante, soient C et C′; le premier touchant la trajectoire en M et l'enveloppe en N, et le second touchant la trajectoire en M′ et l'enveloppe en N′, de sorte que CM = CN seront deux rayons du premier, C′M′ = C′N′ deux rayons du second.

On pourra toujours choisir ces deux cercles assez voisins pour qu'ils se coupent. Soit P leur point d'intersection le plus voisin de M et M′, et Q leur point d'intersection le plus voisin de N et N′; la corde CC′ de la courbe réfléchissante, sera perpendiculaire sur le milieu de la corde commune PQ; d'où il suit que les angles PCC′ et QCC′ seront égaux.

Si l'on conçoit que le centre C′ marche vers C, en suivant la courbe réfléchissante, le rayon variant d'ailleurs de manière que le cercle soit toujours tangent à MM′ et NN′; alors les points M′ et P marchant respectivement sur M′M et PM, tendront sans cesse à se confondre avec le point M; et les points N′ et Q marchant respectivement sur N′N et QN, tendront sans cesse à se confondre avec le point N. En même-temps la corde CC′ tournant sans cesse autour de C, tendra sans cesse à devenir la tangente en ce dernier point à la courbe réfléchissante.

Lorsqu'enfin le point C′ aura atteint le point C, les points P et Q se trouveront en M et N; mais, comme durant le changement les angles PCC′ et QCC′ n'auront pas cessé d'être égaux, il s'en suit que CM et CN, normales à la trajectoire et à l'enveloppe par le point C, doivent faire des angles égaux avec la tangente à la courbe réfléchissante en ce même point; donc CM étant un rayon incident, CN est le prolongement du rayon réfléchi; donc enfin l'enveloppe NN′ est une trajectoire orthogonale des rayons réfléchis (1).

---

(1) J'ai cité dans le premier cahier de notre Correspondance, deux théorèmes sur les caustiques des courbes planes, en même-temps que l'importante extension que leur a donnée M. *Gergonne*, en supposant le cas de plusieurs réflexions et réfractions consécutives : dans le 3.e cahier du même recueil, j'ai inséré les énoncés de deux nouveaux théorèmes sur les surfaces caustiques pour lesquels je me suis rencontré avec M. *Gergonne*, ainsi que deux autres théorèmes sur les caustiques des courbes à double courbure. Je me suis contenté de donner les énoncés, sans aucuns détails sur le mémoire d'où ils sont extraits en partie, ni sur les recherches que j'ai faites depuis, me proposant de tirer plus tard parti des développemens que M. *Gergonne* a promis de donner dans son excellent journal. Je n'ai point voulu différer cependant de faire connaître à nos lecteurs la démonstration précédente qui m'a été communiquée par ce savant. Nous nous empresserons toujours d'en user ainsi, quand il s'agira de recherches dont on pourrait, par la suite, contester l'antériorité. Qu'il me soit permis de rappeler à cet égard l'honorable témoignage que la *Revue encycl.* a bien voulu me donner, en rendant compte de mon premier travail sur les caustiques. Ce témoignage, je l'avoue, m'est bien précieux : il vaudrait mieux cependant, pour l'honneur des sciences, qu'on ne put pas le regarder comme un éloge. « En exposant son travail sur cette application des mathématiques

Vous voyez, Monsieur, que cela est bien simple et bien rigoureux; et c'est à-peu-près à cela que revient la démonstration de M. *Dupin*, pour les surfaces réfléchissantes (1).

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution par M. Jh. Plateau, *étudiant à l'Université de Liége, de la question* 1.°, *page* 32.

Il me paraît que la question relative aux couples, peut se démontrer d'une manière extrêmement simple par l'axiome si souvent employé dans le Traité de Mécanique de M. *Poisson*, savoir, qu'on ne trouble pas l'équilibre d'un système, en rendant fixe l'un quelconque de ses points (*fig.* 27).

En effet, dans le couple représenté ci-dessus, rendons fixe le point d'application n de la force $+P$; cette force sera détruite par la résistance du point fixe; mais rien alors n'empêchant l'action de la force $-P$, elle fera tourner la droite mn autour de ce même

---

à la science de la lumière, M. *Quetelet* se plait à rappeler ceux de tous les géomètres qui l'ont précédé dans la carrière, et particulièrement ce qu'il doit à son collègue M. *Dandelin*. Cet esprit de justice resserre les liens entre les savans, hâte et multiplie les communications fructueuses et par conséquent les progrès de la science. C'est la *vertu* de la république des lettres, le secret de sa force et le plus sûr garant de sa prospérité. » (Cah. d'août.)

A. Q.

(1) Dans le n.° d'août 1825 du Bulletin des Sciences physiques et mathématiques, et à la suite des énoncés des six théorèmes de M. *Gergonne*, sur les caustiques, que nous avons fait connaître, on lit pag. 84 : *nous observerons à notre tour que les théorèmes de M.* Gergonne, *pourraient tous se déduire, à priori, de l'hypothèse des ondulations.*

J. G. G.

point fixe : donc, puisqu'après avoir rendu l'un des points fixe, le système n'est pas en équilibre, il faut conclure qu'il n'y était pas auparavant.

Si l'on niait l'évidence de l'axiome ci-dessus, je le démontrerais en observant qu'un point quelconque d'un système en équilibre, pouvant être considéré comme soumis à l'action de deux forces égales et directement opposées, il est parfaitement indifférent de regarder chacune de ces forces comme détruite par la résistance de l'autre, ou par la résistance du point d'application supposé fixe.

Solution par M. Lobatto *de la question* 3.°, *proposée pag.* 32.

On sait par la Géométrie élementaire, qu'en divisant le rayon du cercle dans une proportion moyenne et extrême, la plus grande partie sera le côté du décagone inscrit; donc en désignant ce côté par x, et le rayon par l'unité, il viendra la proportion (1)

$$1-x : x = x : 1$$

---

(1) On trouve dans *le Bulletin universel des sciences*, n.° 8, août 1825, pag. 66, cette remarque sur un écrit de M. *Levy*, in-8.° de 11 pag. Rouen, 1824, ayant pour titre : *Observations sur les polygones étoilées*; « le problème en question fournit, comme on le sait, les deux racines $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dont la seconde résout un problème inverse de celui de la division proprement dite, et qui peut s'énoncer ainsi : *trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre une ligne donnée et la même ligne plus la ligne cherchée*. Cela posé, on a pu remarquer que la construction par laquelle les auteurs démontrent d'après *Euclide*, que la corde de l'arc $\frac{1}{10}2\pi$, est moyenne proportionnelle entre le rayon et le rayon moins cette corde, peut aussi servir à démontrer que la corde de l'arc triple $\frac{3}{10}2\pi$, est moyenne proportionnelle entre le rayon et le rayon plus cette corde. On a ainsi l'interprétation la plus naturelle des deux valeurs auxquelles conduit l'analyse du problême et l'opposition de leurs signes. M. *Levy* observe

ou bien

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x = (x+1)\,x = 1$$

d'où

$$x = \frac{1}{x+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Solution par M. Goëbel, *professeur à l'Université de Louvain, de la question 4.° proposée, pag.* 32 (1).

Avant de procéder à la démonstration du théorème, dit l'auteur, nous croyons devoir rappeler deux propositions qui se trouvent démontrées dans presque tous les Traités de sections coniques.

1.° *Soit un arc de parabole* MM′*m* (fig. 28), M*m sa corde, n son milieu,* M*nx une parallèle à l'axe principal* AX *de la courbe : si*

---

que cette dernière corde venant à joindre de 3 en 3 les sommets d'un décagone régulier, décrira dans le cercle un polygone fermé de dix côtés, de l'espèce de ceux que M. *Poinsot* a considérés le premier sous le nom de *Polygones étoilés*. M. *Levy* émet la conjecture qui peut se changer en un théorème important, savoir : que les diverses racines des équations d'où dépend l'inscription des polygones réguliers, correspondent aux cordes des différens polygones étoilés. Pour expliquer l'opposition des signes des valeurs des cordes des deux décagones, l'auteur imagine deux cercles de même rayon qui se coupent, en ayant pour corde commune le côté d'un décagone régulier : la corde de première espèce dans le premier cercle, prolongée dans le second, donne la corde de la deuxième espèce ». Au reste, nous soumettrons cette partie de la remarque au savant prof. *De Gelder,* qui s'est occupé avec le plus grand succès de l'interprétation des signes, comme on le verra dans la partie de ce numéro consacrée à la Revue.

J. G. G.

(1) On en trouve pag. 137 et 138, deux solutions bien simples.

on mène une tangente Mt *à l'extrémité* M *de cet arc, et qu'on prolonge* xM' *jusqu'à sa rencontre en* r, *on aura* $M'r = M'n$.

2.° *Les tangentes* Mt *et* mt' *aux extrémités de l'arc* Mm, *se coupent dans le point* r.

Si l'on prolonge la tangente mt' et la corde mM jusqu'à leurs rencontres en R' et R avec l'axe principal, et si par M on conçoit une parallèle MM'' au même axe, la corde mM' prolongée, passera par les milieux m' et m'' des droites MM'' et RR' : donc $Rm'' = m''R'$. La tangente $TM'T'$ au point M', étant parallèle à la corde Mm, il suit delà et de $nm = nM$, qu'on a aussi $M'n = r''M = \frac{1}{2} Mm' = RT$: conséquemment $Mm' = 2M'n = nr$. Si donc on tire la droite $rm'r'$, on aura le parallélogramme $Rnrr'$. Comme la ligne rr' passe par le milieu m' de la transversale MM'' considérée dans le triangle $R'rR''$ dont le côté rR'' est la tangente en M, prolongée jusqu'à l'axe, on a $r'R' = r'R''$. Cela posé, on obtient ces égalités

$$r'R'' = r'R' = r'R + RR'' = rn + RR'' = 2M'n + RR''$$
$$r'R' = r'm'' + m''R'$$

Donc, à cause de l'égalité des premiers membres, il vient

$$r'm'' + m''R' = 2M'n + RR''$$

retranchant de part et d'autre

$$R'm'' = m''R = m''r' + r'R = + m''r' + 2M'n$$

il reste

$$r'm'' = RR'' - r'm'', \text{ d'où } RR'' = 2r'm''$$

Or, F étant le foyer de la parabole, on a par une propriété connue

$$FM = FR'' = FT - TR - RR'' = FM' - M'n - 2r'm''$$
$$Fm = FR' = FT + Tr' + r'm'' + m''R' = FM' + nM' + r'm'' + m''R'$$
$$= FM' + nM' + r'm'' + m''r' + r'R = FM' + 2r'm'' + 2M'n + M'n$$

ajoutant ces deux égalités, on obtient enfin

$$FM + Fn = 2\,(FM' + M'n), \text{ d'où } FM' + M'n = \tfrac{1}{2}\,(FM + Fn).$$

N.° V.

Solution de la question énoncée pag. 112.

Nous ne traiterons ici que le premier de ces deux cas, en partant des considérations de M. *Dandelin,* présentées par M. *Quetelet,* pag. 256 et suiv. du présent numéro.

Nous observerons que si les cordes BC, AD, LK, etc. (*fig.* 29) au lieu de concourir au point P, étaient parallèles à une ligne fixe, la rencontre E des sécantes AB et DC, ainsi que les intersections F, I, etc., des diagonales AC et BD, LD et AK, etc., auraient lieu sur la droite qui joint les milieux des cordes supposées parallèles, et par conséquent sur le diamètre même de ces cordes. Nous chercherons donc à ramener le cas général à celui-ci. Concevons, à cet effet, que le plan de perspective de la figure proposée, soit parallèle à la droite qui joint le point de vue ou l'œil du spectateur au point P; alors les sécantes BC, AD, LK, etc., seront parallèles entre elles, dans la perspective; d'où il suit que, dans le tableau, les perspectives des points E, F, I, etc., seront en ligne droite; par conséquent ces points seront eux-mêmes en ligne droite. Ainsi le lieu cherché est une ligne droite EFI, etc. Lorsque les deux sécantes PB et PA se rapprochent indéfiniment, les lignes EBA et ECD tendent à devenir tangentes; ce qui montre que *si d'un point* P *extérieur à une courbe du second degré, on lui mène des sécantes, et que par les points où elles rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe, la suite des intersections de ces tangentes deux à deux, sera encore la même droite* EFI, *etc.* Les points de contact cherchés, sont les points T et *t*, etc. dans lesquels la droite EFI coupe la courbe; les deux tangentes seront donc PT et P*t*. De ce nous venons de dire, il résulte que *si de tous les points d'une droite extérieure à une courbe du second degré, on tire des couples de tangentes à cette courbe, et qu'on mène des droites par les points de tangence des deux tangentes qui partent d'un même point, toutes ces droites passeront par un certain même point.* On peut encore déduire de ces propriétés un moyen bien simple de construire par points une courbe du second degré, quand déjà on connaît cinq de ses points. Nous reviendrons dans le n.° suivant, sur cette question, pour en donner la solution analytique.

J. G. G.

PHYSIQUE.

Sur la polarisation de la lumière réfléchie par l'air.

L'observation qui forme l'objet de cette note, a probablement déjà été faite; cependant comme il ne me souvient pas de l'avoir jamais trouvée dans aucun traité de physique, et comme elle était inconnue aux différentes personnes à qui je l'ai communiquée jusqu'à présent, je la présente ici au risque de répéter ce qui a déjà été dit par d'autres physiciens.

Quand le ciel est pur et dégagé de nuages, les rayons lumineux réfléchis par les diverses parties de l'atmosphère, sont plus ou moins polarisés. Ceux qui arrivent dans la direction même du soleil, n'offrent point de traces de polarisation; mais la polarisation devient d'autant plus forte que l'angle formé par les rayons incidens et la direction du soleil est plus grand, de sorte que quand cet angle est droit, la polarisation est complète : elle diminue ensuite tant que l'angle continue à augmenter, et devient nulle encore quand les rayons réfléchis sont opposés à la direction du soleil. De sorte qu'en se regardant comme placé au centre d'une sphère dont le soleil occupe un des pôles, la *polarisation est à son maximum aux différens points de l'équateur, et va en diminuant comme les carrés des sinus, jusqu'au pôle où elle est nulle.* Pendant le jour, la polarisation n'est pas complète, comme à l'instant où le soleil se trouve un peu plus bas que le plan de l'horizon : pour faire plus commodément les observations, je reçois directement la lumière à travers une petite ouverture circulaire pratiquée dans un carton, et je l'analyse au moyen d'un prisme de cristal de roche, formé de trois pièces que M. *Fresnel* a eu la complaisance de me faire construire et dont il a fait disposer les axes de manière à séparer fortement

les images. En plaçant devant le prisme une lame de mica ou de chaux sulfatée, on peut rendre la polarisation plus sensible, en colorant les deux images de l'ouverture circulaire.

A. Q.

Note sur une nouvelle expérience électro-dynamique et sur son application à la formule qui représente l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs voltaïques; par M. AMPÈRE, *de l'Institut de France, etc.*, (1).

Sur un pied TT′ (*fig.* 30) en forme de table, s'élèvent deux colonnes EF, E′F′ liées entre elles par deux traverses LL′, FF′; un axe GH est maintenu entre ces deux traverses dans une position verticale. Les deux extrémités G, H terminées en pointes aigues, entrent dans deux trous coniques pratiqués l'un dans la traverse inférieure LL′, l'autre à l'extrémité d'une vis KZ portée par la traverse supérieure FF′ et destinée à presser l'axe sans le forcer. En C est fixé invariablement à cet axe un support QCO dont l'extrémité O présente une charnière dans laquelle est engagé par son milieu un arc de cercle AA′ formé d'un fil métallique qui reste constamment dans une position horizontale et qui a pour rayon la distance du point O à l'axe. Cet arc est équilibré par un contre-poids Q, afin de diminuer le frottement de l'axe GH dans les trous coniques où ses extrémités sont reçues.

---

(1) Nous nous fesons un véritable plaisir de faire connaître à nos lecteurs les nouvelles recherches que vient de nous communiquer M. *Ampère*, l'un des savans à qui la théorie de l'électro-magnétisme doit les plus brillantes découvertes. Nous regrettons en même-temps de devoir renvoyer à un prochain cahier l'extrait d'une lettre du même Physicien qui tend à éclaircir quelques points de sa théorie.

A. Q.

Au-dessous de l'arc AA′ sont disposés deux augets M et M′ pleins de mercure, de telle sorte que la surface du mercure s'élevant au-dessus des bords, vienne toucher l'arc AA′ en B et B′. Ces deux augets communiquent par des conducteurs métalliques MN et M′N′ avec des coupes P et P′ pleines de mercure; la coupe P et le conducteur MN qui la réunit à l'auget M, sont fixés à un axe vertical qui s'enfonce dans la table de manière à pouvoir tourner librement. La coupe P′ à laquelle est attaché le conducteur M′N′, est traversé par le même axe autour duquel elle peut tourner aussi indépendamment de l'autre. Elle en est isolée par un tube de verre V qui enveloppe cet axe et par une rondelle de verre U qui la sépare du conducteur de l'auget M, de manière qu'on peut disposer les conducteurs MN et M′N′ sous l'angle qu'on veut.

Deux autres conducteurs IR et I′R′ plongent respectivement dans les coupes P et P′ et les font communiquer avec des cavités R et R′ creusées dans la table et remplies de mercure. Enfin une troisième cavité S pleine également de mercure, se trouve entre les deux autres.

Voici la manière de faire usage de cet appareil. On fait plonger l'un des rhéophores, par exemple, le rhéophore positif dans la cavité R, et le rhéophore négatif dans la cavité S qu'on met en communication avec la cavité R′ par un conducteur curviligne d'une forme quelconque. Le courant suit le conducteur RI, passe dans la coupe P, delà dans le conducteur NM, dans l'auget M, dans la partie BB′ de l'arc AA′, dans l'auget M′, le conducteur M′N′, la coupe P′, le conducteur I′R′, et enfin de la cavité R′ dans le conducteur curviligne qui se rend dans la cavité S, où plonge le rhéophore négatif.

D'après cette disposition, le circuit voltaïque total se compose premièrement de l'arc BB′ et des conducteurs MN et M′N′;

Secondement d'un circuit formé des parties RIP, P′I′R′ de l'appareil, du conducteur curviligne qui va de R en S et de la pile elle-même.

Ce dernier circuit doit agir comme un circuit fermé, puisqu'il n'est interrompu que par l'épaisseur du verre qui isole les coupes P et P′ : il suffira donc d'observer son action sur l'arc BB′ pour constater par l'expérience l'action d'un circuit fermé sur un arc dans les différentes positions qu'on peut lui donner.

Lorsqu'au moyen de la charnière O, on met l'arc AA' dans une position telle que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets M et M', en vertu de l'action du courant curviligne fermé. Si, au contraire, son centre est dans l'axe, il reste immobile, le circuit fermé est donc alors sans action pour le faire tourner autour de l'axe, et cela quelque soit la grandeur de la partie BB' déterminée par l'ouverture de l'angle des conducteurs MN et M'N' : si donc on prend successivement deux arcs BB' qui diffèrent peu l'un de l'autre, comme le moment de rotation est nul pour chacun d'eux, il sera nul pour leur petite différence, et par conséquent pour tout élément de circonférence dont le centre est dans l'axe.

On voit donc par là que la direction de l'action passe par l'axe, et qu'elle est par conséquent perpendiculaire à l'élément.

Dans ce dernier cas, les portions de conducteurs MN et M'N' exercent sur l'arc BB' des actions répulsives égales et opposées, en sorte qu'il ne peut en résulter aucun effet; et puisqu'il n'y a pas de mouvement, on est sûr qu'il n'y a pas de moment de rotation produit par le circuit fermé.

Dans l'autre cas, les actions des conducteurs MN et M'N' n'étant plus égales, on pourrait croire que le mouvement n'est dû qu'à cette différence; mais suivant qu'on approche ou qu'on éloigne le circuit curviligne qui va de R' en S, ce mouvement est augmenté ou diminué, ce qui ne permet pas de douter que le circuit fermé ne soit pour beaucoup dans l'effet observé.

Une fois qu'on a établi, par cette expérience, que l'action d'un circuit fermé sur un élément de circuit voltaïque, est toujours perpendiculaire à la direction de cet élément, on peut en déduire par un calcul très-simple la relation en n et k que j'avais d'abord trouvée par un autre procédé. Il suffit, en effet, pour cela de décomposer l'action qu'exerce sur l'élément que l'on considère chacun des élémens du circuit fermé, en deux forces, l'une perpendiculaire à cet élément et l'autre qui ait la même direction que lui et que je nommerai force tangentielle élémentaire, puis de faire la somme de toutes les forces tangentielles élémentaires produites par le circuit fermé, et d'égaler à zéro leur somme qui est la force tangentielle due à tout le circuit. Or, si l'on représente par ds' l'élément sur

lequel agit le circuit, par ds un élément de ce circuit, et que l'on conserve d'ailleurs les dénominations du mémoire imprimé dans mon recueil page 248 et suivantes, on aura pour l'action des deux élémens

$$ii'\,r^{1-n-k}d\,(r^k d'r) \text{ (page 310.) } (*)$$

d'ailleurs

$$\cos.\,\zeta = -\frac{dr.}{ds'}, \text{ (pag. 303) d'où } \frac{dr}{ds'}\,ds' = d'r = -\,ds'\cos.\,\zeta,$$

ce qui change la valeur de l'action des deux éléments, en

$$ii'ds'r^{1-n-k}d\,(r^k \cos.\,\zeta)$$

car ds' qui représente l'élément sur lequel agit le circuit fermé, est constant par rapport à la caractéristique d.

Pour avoir la force tangentielle élémentaire, il faut multiplier cette valeur par $\cos.\,\zeta$; ce qui donne $ii'ds'r^{1-n-k}\cos.\,\zeta \times d\,(r^k \cos.\,\zeta)$. qu'on peut mettre sous la forme

$$\tfrac{1}{2}\,ii'ds'r^{1-n-2k}d\,(r^k \cos.\,\zeta)^2:$$

intégrant par partie, on en tire pour la force tangentielle totale

$$\tfrac{1}{2}\,ii'ds'\left[r^{1-n-2k}\left(r^k\cos.\,\zeta\right)^2 - \left(1-n-2k\right)\int r^{-n-2k}\left(r^k\cos.\,\zeta\right)^2 dr\right],$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\,ii'ds'\left[r^{1-n}\cos.^2\zeta - (1-n-2k)\int r^{-n}\cos.^2\zeta dr\right],$$

Comme le circuit est fermé, r et ζ prendront les mêmes valeurs aux limites : ainsi la première partie $r^{1-n}\cos.^2\zeta$ disparaîtra. Mais il n'en sera pas de même de la seconde qu'on ne peut calculer qu'après avoir remplacé l'une des variables r ou ζ par sa valeur en fonction de l'autre tirée des équations du circuit, en sorte qu'on peut choisir ces équations de manière que l'intégrale $\int r^{-n}\cos.^2\zeta dr$ ne soit pas nulle entre les limites. Pour que la force tangentielle totale s'évanouisse, il faut donc que le coefficient de cette intégrale soit nul, ce qui donne la relation cherchée $2k+n-1=0$.

Pour se faire une idée plus juste de l'intégrale $\int r^{-n}\cos.^2\zeta dr$, on peut concevoir, autour du milieu de l'élément ds' pris pour

---

(1) Les personnes qui n'auraient pas le recueil cité de M. *Ampère*, pourraient consulter la deuxième partie du *Manuel d'électricité-dynamique de M. J. F. Demonferrand*. J. G. G.

centre, une infinité de surfaces sphériques qui divisent le circuit fermé en arcs infiniment petits, de manière que les deux surfaces sphériques extrêmes le touchent aux deux points de circuit qui sont l'un le plus éloigné et l'autre le plus proche du milieu de l'élément; alors on pourra considérer le circuit fermé comme composé de deux branches terminées à ces deux points et divisées toutes deux en un même nombre d'arcs infiniment petits, en sorte qu'a chacun des arcs d'une branche, réponde un arc de l'autre branche compris entre les deux mêmes surfaces sphériques consécutives : pour deux arcs correspondans, on a alors la même valeur de r et les valeurs de dr sont égales, mais de signes contraires, puisque le courant ne peut aller en s'éloignant de l'élément ds' dans une des branches, sans aller en s'en approchant dans l'autre. On voit par là pourquoi l'intégrale $\int f(r)\,dr$ est toujours nulle quand on la prend dans toute l'étendue du circuit fermé, puisque cette intégrale se compose alors d'élémens qui sont, deux à deux, de même valeur, mais de signe contraires.

Il en serait de même de $\int f(r) \cos.^2 \zeta dr$, si $\cos.^2 \zeta$ avait la même valeur pour les deux élémens correspondans quelconques, par exemple, si ces deux élémens étaient toujours situés symétriquement des deux côtés d'un plan élevé perpendiculairement sur le milieu de ds'; mais si, au contraire, dans une des deux branches la valeur absolue de $\cos. \zeta$ pour chaque élément, est plus grande que pour son correspondant, l'autre branche, l'intégrale $\int f(r) \cos.^2 \zeta\, dr$ se composera de deux séries de termes, dont l'une ne contiendra que des termes positifs et l'autre des termes négatifs, de manière que chacun des premiers ait une valeur absolue plus grande ou plus petite que celle du terme négatif qui lui correspond dans l'autre série. Dès lors cette intégrale ne pourra jamais être nulle, et il faudra pour que la force tangentielle le soit, conformément à l'expérience, que $2k+n-1=0$. Lorsque la portion du circuit voltaïque qui agit sur l'élément ds', n'est pas fermé, la force tangentielle qui en résulte n'est plus nulle, et quand on désigne par r', r'', ζ', ζ'', les valeurs de r et de ζ correspondantes aux deux extrémités de cette portion, celle de la force tangentielle devient

$$\frac{ii'ds'}{2}\left[\frac{\cos.^2 \zeta''}{r''^{\,n-1}} - \frac{\cos.^2 \zeta'}{r'^{\,n-1}}\right].$$

REVUE SCIENTIFIQUE.

En offrant les énoncés des questions mathématiques et physiques proposées par les Universités du royaume des Pays-Bas, nous avons surtout pour but de fournir aux savans étrangers qui ont bien voulu souscrire à notre Correspondance, des documens d'après lesquels ils puissent juger sainement de l'état de l'instruction scientifique de ce pays. A ces données, nous joindrons, par la suite, l'indication des sujets traités dans les Thèses pour le doctorat dans les Sciences mathématiques et physiques. Comme nous avons sous la main tout ce qui a rapport à l'Université de Gand, nous la placerons en première ligne dans cet inventaire (1).

(1) On décerne tous les ans dans chaque Université, huit médailles d'or, de la valeur de 50 florins, chacune; les étudians proprement dits des six Universités, sont les seuls qui puissent concourir. La distribution des médailles se fait annuellement par le Recteur de chaque Université, après le discours par lequel il transmet sa dignité à son successeur. Quand une dissertation est jugée digne du prix, l'auteur est invité à comparaître devant la faculté qui a proposé la question, afin de défendre pendant une demi-heure sa dissertation contre les objections des membres de la faculté. Le gouvernement accorde à l'élève étranger une indemnité pour les deux voyages qu'il est obligé de faire pour venir défendre sa thèse, et recevoir sa médaille ou la valeur en espèces. Une des dispositions du réglement universitaire, porte qu'on proposera surtout des questions dont la solution suppose plutôt la fréquentation assidue des leçons, qu'une sagacité extraordinaire d'esprit.

J. G. G.

Questions proposées au concours général, par l'Université de Gand.

Année 1817 - 1818 (Epoque de l'installation).

Generalis theoria compositionis ac resolutionis virium motuumque, e legitimis principiis deducta, succincte exponatur et idoneis exemplis illustretur.

L'auteur du mémoire couronné, est M. *Jean Alex. Timmermans*, de Bruxelles, élève de l'Université de Gand, maintenant professeur de Mathématiques spéciales au Collége Royal de cette ville.

La première partie de ce mémoire, qui a pour titre : *de compositione ac resolutione virium;* se divise en cinq chapitres, savoir : 1.° De compositione ac resolutione virium in eadem directione et in directione opposita agentium : 2.° De compositione ac resolutione virium concurrentium : 3.° De virium parallelarum compositione ac resolutione : 4.° de virium paribus (*des couples*) : 5.° de compositione ac resolutione virium quoque versus in spatio directarum. La seconde partie est intitulée : *De compositione ac resolutione motuum.* L'auteur annonçait dès lors cette tendance d'esprit vers la mécanique dont il s'est depuis occupé avec succès. Les deux cahiers précédens et le suivant offriront l'ensemble de ses recherches sur le principe des vitesses virtuelles : il nous en promet d'autres sur les applications de la mécanique aux manufactures.

Année 1818 - 1819.

Supponantur in uno eodemque plano tres circuli sibi invicem externi quorum centra sint O, O′ et O″ et radii R, R′ et R″ : supponantur etiam tangentes exteriores tum ad circulos O et O′, quæ priorem O ad puncta T et T′, posteriorem vero ad puncta t et t' contingant,

tum etiam ad circulos O et O″ quæ priorem O ad T″ et T‴, alterum vero O″ ad t'' et t''' contingant : quibus positis, in circulo O duæ chordæ contactus TT′ et T″T‴ sese intersecabunt in quodam puncto M, et in utroque circulo O′ et O″ chordæ contactus tt' et $t''t'''$, productæ, in N concurrent. Si tunc ducitur recta NM, demonstrandum erit puncta P et Q in quibus hæc recta MN occurrit circulo O, esse puncta contactus duorum circulorum quorum alter tres involvit circulos datos, alter vero intra eosdem circulos continetur. Quærenda etiam erunt duo reliqua puncta contactus utriusque circuli O′ et O″. Denique sedulo investigandæ sunt mutationes quas solutio patitur, dum datorum circulorum tum centrorum positio, tum radiorum magnitudo variabilis supponitur. Constructiones e legitimis Geometriæ elementaris principiis deducantur necesse est.

La question a été remise au concours, en 1819 - 1820 et enfin elle a été retirée.

Année 1820 - 1821.

Invenire formulas quarum ope, dato cuilibet systemati coordinatarum in spatio, aliud quoddam systema substituitur, quod quidem problema ad tria sequentia reducitur : 1.° Transire a coordinatis orthogonalibus ad alias quoque orthogonales : 2.° Transire a coordinatis rectangulis ad coordinatas obliquas : 3.° Transire a coordinatis obliquis ad alias quoque obliquas. Præterea ope formularum 1°, æquationem generalem secundi gradus inter tres variabiles, ad simplicissimam revocare, quæ easdem superficies exprimat.

L'auteur du mémoire couronné, est M. *Jean-Bapt. Guinard*, de Gand, élève de l'Université de cette ville, docteur en médecine et en sciences.

Ce mémoire est divisé en quatre parties dont les trois premières offrent, à proprement parler, la solution de la question : dans la quatrième, l'auteur applique les formules trouvées à la démonstration de quelques affections des surfaces, et, en particulier, des théorèmes d'*Euler*, de *Meusnier*, *Monge*, *Dupin*, sur les rayons de courbure ; enfin il fait quelques excursions dans la Gnomonique, l'Astronomie et la Mécanique. Ce mémoire annonce de bonnes études et la connaissance approfondie de plusieurs branches de la science.

Année 1821 - 1822.

Requiritur 1.° Enunciatio generalis principii celeritatum virtualium (principe des vitesses virtuelles) : 2.° Expositio historica graduum per quos ad id principium perventum sit : 3.° Demonstratio directa hujus principii in vecte sive rectilineo, sive angulari, nec non in machina funiculari, in trochlea, in plano inclinato, in cochlea, in cuneo, et in rotis dentatis, tali modo absolvenda ut inde eruantur conditiones jam cognitæ æquilibrii in variis hisce machinis.

Nous avons analysé ce mémoire dans le 2.e numéro de la Corresp. pag. 83 et suiv.

Même année.

Data duorum locorum differentia latitudinis et linea loxodromica, invenire differentiam longitudinis eorumdem locorum.

Ce mémoire qui a pour auteur M. *G. Verdam*, élève de l'Université de Leyden et couronné dans quatre Universités, a été analysé, même numéro, pag. 87 et suivantes.

Année 1822 - 1823.

Quæruntur 1.° Investigationum de *variationum calculo* a Geometris factarum, narratio : 2.° Ejusdem calculi principiorum accurata et lucida expositio : 3.° Formularum hujus calculi frequentius adhibitarum demonstratio, cum quibusdam e Geometria et Mechanica desumptis applicationibus.

L'auteur de la réponse couronnée dont nous rendrons compte dans un prochain numéro, est M. *Verhulst*, de Bruxelles, élève de l'Université de Gand, déjà couronné à Leyden, maintenant Docteur en sciences.

Même année.

Exponere ac determinare ea quæ experimentis physicis et propositionibus anatomiæ comparatæ demonstratis constant de oculi mutationibus internis quibus efficitur ut, non obstante distantiæ objectorum varietate infinita, oculus bene conformatus in statu sano semper distincta visione gaudeat.

La réponse couronnée est de M. *Herden*, de Malines, élève de l'Université de Gand, professeur de Mathématiques au Collége royal de cette ville, candidat en médecine et en sciences, déjà couronné en 1822, pour sa réponse à une question d'anatomie comparée.

Année 1824 - 1825.

1.° Investigationes mere mathematicas de causticis per reflexionem et refractionem a tempore *Tschirnhausen*, usque ad nostram ætatem factas enarrare : 2° Duplicis hujus causticarum speciei theoriam deducere ex problemate generali : *reperire curvam tangentem alias cuvas numero infinitas et legi communi subjectas, vel quarum æquationes non nisi quantitate constante inter se differunt :* hujus principii applicatione restricta 1.° ad casum unius refractionis per superficiem planam : 2.° ad casum duplicis refractionis per laminam aere ambiente magis refrangentem : 3.° ad casum quo radii e medio quolibet in aliud transmissi, pertranseunt superficiem sphæricam. Quæritur insuper ut quæ dicta sunt de causticis per refractionem, ad causticas per reflectionem extendantur.

La réponse couronnée est de M. *Mareska*, de Gand, candidat en sciences à l'Université de cette ville, déjà couronné à l'Université de Liége. Nous en rendrons compte.

Année 1825 — 1826.

Exstat quoddam in mechanica generale principium ex quo petitur solutio problematum circa motum cujusvis corporum systematis : hujus principii enuntiatio, demonstratio et nonnullæ applicationes requiruntur.

Novo et scrupuloso examini subjicere *legem coulombianam*, qua asseritur repulsionem electricam et attractionem magneticam semper esse in ratione inversa quadrati distantiæ.

Mémoires de la première classe de l'Institut d'Amsterdam, 1825.

Le volume qui vient de paraître, contient des mémoires sur divers

sujets de mathématiques et de physiologie; comme cette dernière partie n'est point de nature à être analysée dans ce recueil, nous nous bornerons à faire connaître les recherches qui se rapportent particulièrement aux sciences Mathématiques.

M. *J. Floryn*, dans une note peu étendue, s'est occupé d'un problême dont il est question dans le *Magasin encyclopédique*, pour octobre 1813, à l'occasion d'un opuscule publié en Amérique, qui devait son origine à un pari d'une nature assez singulière. Il s'agissait de savoir si, quand une roue s'avance sur un plan, d'un mouvement uniforme, les différens points de sa circonférence ont ou non une vitesse uniforme. Un moment de réflexion suffit pour faire comprendre que la combinaison du mouvement direct de la roue avec son mouvement circulaire, doit donner lieu à des vitesses inégales dans les différentes positions que peut prendre un point de la circonférence. M. *Floryn*, en soumettant le problême à un examen attentif, trouve pour la vitesse cherchée

$$S = s \times \frac{BM}{AC};$$

s est la vitesse commune provenant du mouvement de translation du système en ligne droite, AC est le rayon de la roue et BM la corde qui joint le point que l'on considère au point où la roue s'appuie sur le plan, de sorte que ce dernier point ayant sa corde nulle, est un instant en repos; tandis qu'il a le maximum de vitesse dans une position diamétralement opposée, la corde étant alors égale au diamètre et la vitesse cherchée égale à deux fois celle que le système a en ligne droite.

Parmi les différentes méthodes qui servent en mer à déterminer la latitude d'un lieu, il en est une qui se trouve indiquée dans les traités de navigation, mais qui est rarement employée par les marins; c'est celle qui a pour but de déterminer la latitude hors du méridien par des hauteurs correspondantes. M. *O. S. Bangma* attribue la principale cause qui fait négliger cette méthode, à la difficulté d'observer un astre des deux côtés du méridien, à des hauteurs égales, et cherche les moyens d'y remédier : il propose à cet effet des formules qui permettent d'employer pour le but qu'on se propose, des observations d'un astre à des hauteurs inégales. L'auteur cherche ensuite à estimer l'influence que les erreurs des observations pourraient introduire dans les résultats.

M. *J. F. Keyser* a discuté les observations de la grande éclipse de soleil du 7 septembre 1820, faites à Amsterdam, et a trouvé que les résultats s'éloignaient peu de ceux obtenus par d'autres Astronomes. M. *Bouvard* qui s'était transporté à Fiume pour observer la même éclipse, a comparé de son côté la plupart des observations faites par d'autres Astronomes; mais moins heureux, il m'a dit depuis n'avoir jamais pu parvenir a établir de la concordance entre-elles. Il attribuait cette difficulté à la manière dont les résultats sont généralement présentés. L'observateur ne s'aperçoit en effet du commencement du phénomène, que quand déjà le bord du soleil se trouve faiblement éclipsé, et alors il introduit dans son observation une correction plus ou moins vague, plus ou moins élevée d'après des estimations qui n'ont rien de positif. La même correction se fait ensuite pour l'instant de la fin de l'éclipse. Peut-être vaudrait-il mieux se contenter d'indiquer les résultats tels qu'on les a obtenus, en indiquant en même-temps l'estimation de la correction à faire, afin de laisser à celui qui voudrait l'employer, le moyen de juger de l'erreur qu'il s'expose à commettre. M. *Bouvard*, pour montrer jusqu'à quel point son observation était fondée, a fait peindre sur un tableau noirci une image blanche qui représentait le soleil, en y pratiquant plusieurs échancrures de différentes dimensions. Cette image, placée à une certaine distance, par l'effet de l'irradiation, ne permettait d'apercevoir, même avec des lunettes, qu'un certain nombre de ces échancrures et les autres échappaient aux regards des observateurs les plus exercés, comme il en a eu la preuve à l'Observatoire royal de France. Nous fesons cette remarque non pas dans l'intention d'infirmer en rien l'assertion de M. *Keyser*, qui d'ailleurs ressort de ses calculs, mais pour donner une nouvelle preuve des précautions que l'on doit prendre dans une science aussi délicate que l'Astronomie.

Nous ne parlerons point ici de la dissertation de M. *C. Ekama*, sur l'Astronome *Gemma Frisius*, dont nous avons extrait un grand nombre de détails pour former la notice qui se trouvera dans le prochain cahier de notre recueil : nous nous contenterons d'observer qu'on est toujours sûr d'intéresser les savans en leur parlant de ceux dont les travaux ont produit des résultats utiles.

M. *Moll*, professeur à l'Université d'Utrecht, a fait avec monsieur

A. Van Beek, une série d'observations pour établir la vitesse du son. Ces deux savans avaient pris une base de 17669^m,28 entre Narden et Amersfort. Le résultat des expériences a été que la vitesse du son, par un temps sec et à 0 de température, est de 332^m,05 par seconde, ou de 1089,744 pieds anglais, 1022,197 pieds de Paris et 1057,664 pieds du Rhin. Le résultat est, à peu près, une moyenne entre ceux qu'ont obtenus *Benzenberg*, en Allemagne et les Physiciens français dans les environs de Paris : il diffère aussi très-peu de ce qu'a obtenu *Cassini de Thury*, en France en 1738, comme on peut le voir d'ailleurs par le tableau que MM. *Moll* et *Van Beek* ont joint à leur travail, et qu'ils ont extrait du mémoire de M. *Van Rees* (1) sur la vitesse du son. On trouve aussi dans cet intéressant travail tous les résultats des expériences et tous les calculs justificatifs, ainsi que la description des instrumens qui ont été employés et les noms des personnes qui ont concouru à faire les expériences, de sorte qu'il n'y manque aucun des élémens qui pourraient, au besoin, augmenter la confiance.

A. Q.

Mélanges de Mathématiques ou *Applications de l'Algèbre à la Géométrie élémentaire*, *par M.* Noel, *Luxembourg* 1822.

Ce recueil qui, pour la composition, ressemble beaucoup à ceux qui ont été publiés par MM. *Puissant*, *Garnier*, *Lobatto*, etc.,

---

(1) Dans le n.° VIII du Bulletin des Sciences math. phys. et chim., août 1825, pag. 108 et suiv., on trouve une analyse assez détaillée du travail de MM. *Moll* et *Van Beek*; ainsi que de la dissertation de M. le professeur *Van Rees*, de Liége, *de celeritate soni*, qui a pour objet de montrer que les commissaires français ont tort de prendre la moyenne Arithmétique entre les temps comptés par les observations aux deux extrémités de la base, tandis que c'est la moyenne géométrique qu'il faut employer, pour calculer plus exactement la vitesse du son. En effet soit a la base, s la vitesse du son dans un air calme, v la vitesse du vent, A l'angle que sa direction fait avec la base, t le temps compté à l'une des extrémi-

présente un grand nombre de problêmes qui pourront servir d'exercice aux jeunes gens qui commencent l'étude des Mathématiques. On pourra juger par les principaux titres de la variété des sujets qui s'y trouvent traités. Sous le titre de *Recueil de théorèmes et problêmes de Géométrie élémentaire*, l'auteur passe d'abord en revue les propositions les plus intéressantes des élémens; il en vient ensuite à l'*application de l'Algèbre à la Géométrie*, et il entre dans des détails sur l'interprétation des distances imaginaires (1) et des questions des maxima et minima : il jette aussi un coup-d'œil sur la *Trigonométrie* et expose plusieurs théorèmes et problêmes sur les *Projections*. On lira surtout avec intérêt les *propositions de Statique et les additions* qui terminent l'ouvrage. M. *Noël* y expose plus en détail sa théorie des *numéros* des lettres (2), et la recherche élémentaire du maximum ou du minimum d'une variable.

A. Q.

---

tés de celle-ci, entre la lumière et le coup, t' le temps compté de même à l'autre extrémité de la base : on a pour formule rigoureuse

$$S = a\sqrt{\frac{1}{tt'} + \frac{(t'-t)^2}{4t^2t'^2\cos.^2A}}.$$

En négligeant le second terme sous le radical, à cause de son extrême petitesse, on a simplement

$$S = a\sqrt{\frac{1}{tt'}}$$

au lieu de

$$S = \frac{a}{\frac{1}{2}(t+t')}$$

formule à laquelle on s'est borné jusqu'à présent; nous invitons, dit l'auteur de l'analyse, les savans Français, et surtout M. *Laplace*, à examiner cette question.

J. G. G.

(1) On pourra consulter avec succès sur le même chapitre, l'ouvrage de M. *De Gelder*, intitulé : *Proeve over de positieve en negatieve grootheden*, dont on trouvera l'analyse ci-après.

(2) Voyez le cahier précédent de la Corr. math.

Analyse de l'ouvrage de M. le professeur De Gelder, *ayant pour titre :* Proeve over de positieve en negatieve grootheden, 's Gravenhage, 1815; *par M.* Van Rees, *professeur ordinaire à l'Université de Liége.*

Ce n'est pas seulement en augmentant le domaine des sciences par de nouvelles découvertes, que les savans se font des titres à la reconnaissance publique; souvent même, avec moins d'éclat, leurs recherches ont encore un certain degré d'utilité, quand elles sont dirigées vers le but d'éclairer le vestibule des sciences, et d'écarter les difficultés qui peuvent se présenter aux commençans. Mais leurs travaux se recommandent bien plus encore, lorsqu'il portent sur des théories qui, quoique élémentaires, ont été le sujet de vives discussions, et sur lesquelles les opinions ont été jusqu'ici divisées. C'est sous ce rapport, que l'ouvrage de M. *De Gelder* sur les théories des quantités positives et négatives, mérite de fixer l'attention des Géomètres. On connaît les objections de *D'Alembert* et de *Carnot* contre l'ancienne théorie des quantités négatives : on sait que ce dernier surtout, rejettant comme erronées les opinions émises avant lui, leur a substitué dans sa *Géométrie de position*, une nouvelle doctrine d'après laquelle les quantités négatives n'entrent que comme de simples formes algébriques, propres à rendre applicables à des cas non compris dans l'expression des conditions d'un problême, les formules qui expriment réellement ces conditions. Le talent avec lequel l'auteur a exposé ses vues, les a fait adopter par plusieurs Géomètres et leur a valu une place dans un grand nombre d'Elémens de Mathématiques. D'autres savans, au contraire, ont cru que l'ancienne théorie, loin d'être erronée, offrait de grands avantages dans l'enseignement, tandis que celle de *Carnot*, rejettant l'emploi des quantités négatives comme des êtres réels, n'était qu'une source d'embarras et de complications inutiles, en faisant rétrograder l'Algèbre jusqu'au point où elle se trouvait à son enfance. Déjà M. *Gergonne*, avait inséré dans *le IV.e volume de ses Annales de mathématiques*

(pag. 6), un article tendant à s'opposer à la direction donnée par M. *Carnot* (1). L'ouvrage de M. *De Gelder* a le même but, mais son plan est plus étendu; il contient des développemens plus complets, surtout pour ce qui concerne la partie géométrique de la question. Une analyse succincte de cet ouvrage, en fera sentir l'importance et ne sera pas déplacée dans ce journal dont les éditeurs se proposent de réunir comme en un faisceau, tout ce qui, dans ce royaume, se publie de plus important dans le domaine des sciences.

M. *De Gelder* déduit l'origine des quantités négatives de la généralité des expressions algébriques, dont la valeur dépend entièrement de celle des quantités qui les composent. Sous ce rapport, la formule $a-b$ qui désigne, en général, la différence de deux nombres a et b, où le résultat d'une soustraction, présente, suivant que $a>b$ ou $a<b$, deux cas différens. Pour exprimer cette diversité, il faut deux mots et deux signes. Les mots qu'on a choisis sont ceux-ci : *positif* et *négatif*; les signes sont $+$ et $-$.

Pour éclaircir cette définition, l'auteur observe que tout nombre x peut être considéré comme la différence de deux autres nombres a et b, en sorte que $x=a-b$. Si cette différence peut être déterminée dans le sens de la formule, elle est *positive;* mais si elle doit être prise dans le sens opposé, elle sera *négative*. Ainsi $+c$ peut être considéré comme équivalent à $(a+c)-a$, tandis que $-c$ équivaudra à $a-(a+c)$. Les quantités positives et négatives ne sont donc pas d'une nature opposée; elles représentent les deux cas dans lesquels la formule $a-b$ peut se trouver, et aucun nombre n'est ni positif ni négatif, à moins qu'on ne le considère comme valeur de la formule $a-b$.

L'interprétation spéciale de ces deux états différens des nombres, se modifie d'après l'espèce de quantités qu'elles désignent. Le négociant en faisant son bilan, retranche la somme de ses pertes de la somme de ses gains. Pour lui la formule abstraite $a-b$ devient

(*Somme des gains*) — (*Somme des pertes*).

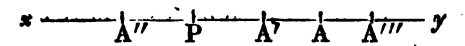
(1) Le célèbre *Lagrange* n'adoptait pas les idées de *Carnot* pour lequel il professait d'ailleurs la plus haute estime.

J. G. G.

Si la soustraction peut s'effectuer dans l'ordre direct, il a *gagné positivement;* dans le cas contraire, son gain est *négatif;* il a perdu.

Nous comptons maintenant la 1825.e année de notre Ere; qu'un événement ait eu lieu avant a ans, la formule $1825-a$ indiquera l'époque de cet événement. Suivant qu'on aura a < ou > 1825, cette formule aura une valeur *positive* ou *négative;* l'événement sera arrivé après ou avant le commencement de notre Ere. Dans les deux cas, la formule représentera un temps réel; la différence du positif au négatif, n'existe que dans le sens dans lequel cet intervalle de temps doit être compté à partir d'une époque fixe.

Bornons notre analyse à l'application des principes de M. *De Gelder,* à la Géométrie. Pour découvrir au moyen de l'Algèbre les propriétés inconnues des figures, on exprime par des équations celles de leurs propriétés qui sont connues, en désignant par des lettres, symboles des nombres, les distances des points à d'autres points, à des droites, à des plans, les angles formés par des droites ou des plans, etc. Or, un point peut être placé par rapport à un autre point à droite ou à gauche, en-dessous ou en-dessus; la même différence de position peut avoir lieu entre un point et une droite, entre les deux côtés d'un angle, etc. L'algèbre, pour conserver le caractère de généralité qui fait son principal mérite, doit pouvoir exprimer ces circonstances par des signes généraux. Nous allons reconnaître que ces signes sont $+$ et $-$, et que la notion des distances positives et négatives, des angles positifs et négatifs, se déduit naturellement de la formule $a-b$, appliquée aux questions Géométriques.



Soit xy une droite indéfinie, P un point fixe. La position du point A sera déterminée par sa distance $PA = a$ à ce point. Faisons rétrograder le point A vers P, jusqu'à A' : soit $AA' = x$, la distance PA' sera $= a - x$. Le mouvement rétrograde continuant, x augmente, $a-x$ diminue. Enfin, le point mobile étant parvenu en A'' au-delà de P, la quantité x sera plus grande que a, la distance PA'' ne pourra plus être déterminée, d'après la formule $a-x$, en soustrayant x de a; on devra, au contraire soustraire, a de x, et la différence PA'' sera *négative.* Il en résulte que si la distance d'un point A' à un point fixe P, est considérée comme positive dans le

sens de P vers y, la distance PA″ d'un point A″ situé de l'autre côté du point P, sera négative.

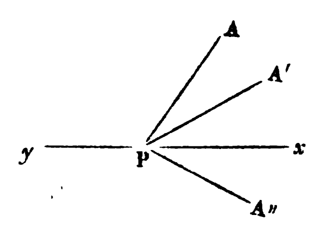
Considérons maintenant aussi le point A comme fixe, et rapportons le point mobile A′ en même-temps à P et A. Supposons le d'abord en P, et soit la direction de P vers y positive. Le point mobile étant parvenu en A′, sa distance à A, c'est-à-dire PA—PA′, sera positive par rapport à A, aussi long-temps que PA′ $<$ PA. Mais dès que le point mobile a dépassé A et se trouve en A‴, la distance AA‴ $=$ PA—PA‴ devient nécessairement négative. En rapportant donc de cette manière un point A′ à deux points fixes P et A, les distances à droite de P, et à gauche de A, sont positives, comme parties d'un tout déterminé PA; les distances aux points fixes, dans les sens respectivement opposés, sont négatives (1).

M. *Carnot* ne semble pas s'être aperçu que l'état positif ou négatif des parties d'une droite, ne peut être conçu, à moins de rapporter ces parties à un point fixe qui sert d'origine aux distances. En effet, dans sa Dissert. prél. p. 10 et 11, il se sert du raisonnement suivant : « Soit P un point fixe sur la droite indéfinie xy : prenons » de part et d'autre de ce point, des distances égales PA′ et PA″. » Cela posé, d'après les notions reçues, PA′ étant regardée comme » positive, PA″ sera négative, et l'on doit avoir PA″ $=$ — PA′, » d'où l'on tire PA″ $+$ PA′ $=$ o, résultat absurde. » Le paralogisme est évident. Car M. *Carnot* se propose ici de réunir les deux parties PA″ et PA′ en un seul tout, ou bien de déterminer la distance A″A′ au moyen des distances A″P et PA′. Dans le premier cas, nous venons de voir que A′ et A″ sont les points fixes, auxquels on rapporte P, et que les longueurs PA″ et PA′ sont en même temps positives. Dans le second, un des points extrêmes A″ ou A′ est le point de départ, et alors la distance PA′, ou PA″, est augmentée de la distance de P à A″, ou de P à A′, prise dans la même direction. Donc, dans ce cas, PA′ et PA″ ne peuvent être de signes contraires.

---

(1) Il nous semble que l'auteur de l'article a voulu dire que, par rapport à la seconde position A‴ du point A′, la distance PA‴ restant positive, la distance du même point A‴ au point fixe A, savoir PA — PA‴ devient négative : en sorte que la somme de ces distances constitue encore le tout PA, ainsi qu'il arrive pour la position intermédiaire A′.

L'auteur étend facilement ses principes à la position d'un point dans un plan ou dans l'espace, déterminée par des coordonnées rectangulaires. En considérant ces coordonnées comme comprises dans la formule générale $a - b$, il fait voir comment elles changent de signe d'après la position des points.



Passons aux angles qui déterminent la direction d'une droite dans un plan. Le droite xy étant fixe, la direction de PA sera connue par l'angle APx. Faisons mouvoir AP autour de P vers x : l'angle APx diminuera, et AP étant parvenu en A′P, l'angle A′Px sera $=$ APx — APA′, et se trouvera compris dans la formule générale $a - b$. La droite mobile ayant passé par Px, et se trouvant en PA″, l'angle APA″ sera $>$ APx : donc A″Px sera négatif : en sorte que *si à partir d'une droite fixe* Px, *on compte les angles positifs dans un certain sens, les angles pris dans le sens contraire, seront négatifs.*

Si, outre le mouvement rotatoire de PA′, le point P changeait de place sur Px, les angles A′Px suivraient encore, quant à leurs signes, la règle précédente.

La valeur positive ou négative des angles, ne change donc pas leur grandeur absolue. Ces angles, de quelque manière qu'ils soient placés, sont de même espèce, et la différence du positif au négatif ne se manifeste que lorsqu'on a égard à la position respective de leurs côtés, un de ces côtés étant pris pour origine fixe des angles.

Les angles étant proportionnels aux arcs, décrits d'un rayon constant entre leurs côtés, les valeurs positives ou négatives des arcs, suivront la même règle que celle des angles. D'ailleurs tout ce qui a été observé par rapport à la première figure, est immédiatement applicable tant aux angles qu'aux arcs.

Ce qui vient d'être exposé, s'applique aussi sans difficulté aux angles d'une droite et d'un plan ou de deux plans.

Après avoir développé les principes sur lesquels se fonde l'emploi des quantités positives et négatives en Géométrie, M. *De Gelder* passe à la partie la plus importante de son ouvrage, dans laquelle il se propose de faire voir que tous les résultats qui se déduisent dans la Géométrie analytique, des équations relatives aux parties d'une figure, sont constamment conformes à la nature de cette figure, même considérée dans tous les changemens qu'elle peut subir, en faisant varier de la manière la plus générale les distances et les angles qui s'y trouvent. *Carnot* et d'autres avec lui avaient soutenu le contraire, en accusant l'Algèbre de donner souvent des résultats non conformes à la figure; c'est donc avec satisfaction qu'on voit l'auteur raffermir en quelque sorte cette science, en réfutant victorieusement les opinions des Géomètres qui l'ont précédé.

Il examine d'abord les différens changemens que subit un triangle en faisant varier par un mouvement continuel, et de différentes manières, la position et la grandeur de ses côtés et de ses angles; et, en indiquant comment ces côtés, ces angles et l'aire du triangle changent dans chaque cas de valeur et de signe, il fait ressortir la parfaite harmonie qui règne constamment entre l'état du triangle et les formules connues. Par exemple, l'aire du triangle est exprimée en fonction des côtés par une formule radicale, précédée du double signe : on est tenté de rejetter le signe — comme insignifiant; mais M. *De Gelder* en fait sentir la nécessité, en indiquant une transformation du triangle, dans laquelle l'aire devient négative, les côtés restant positifs. Car dès lors il est évident que l'Algèbre dont les formules doivent correspondre à tous les changemens possibles du triangle, doit faire précéder l'expression de son aire du signe $\pm$ (1).

L'auteur entre ensuite dans des détails étendus sur les cercles

(1) *Lagrange* a dit dans une autre circonstance ce qu'on peut très-bien appliquer ici, *mutatis mutandis*, savoir : *que si l'analyse paraît quelquefois en défaut, c'est toujours faute de l'envisager d'une manière assez étendue et de la traiter avec toute la généralité dont elle est susceptible* : ici elle paraîtrait pécher par excès, ce qui vient de ce que l'interprétation géométrique est incomplète.

J. G. G.

inscrit et circonscrit au triangle. Il démontre que le rayon d'un tel cercle peut devenir négatif, et que les objections de *Carnot* à cet égard, ne sont nullement fondées.

Après avoir approfondi tout ce qui tient aux changemens du triangle, l'auteur passe aux quadrilatères et aux autres polygones, en appliquant à quelques exemples choisis, ses principes sur la parfaite conformité des résultats de l'Algèbre et de la Géométrie, et les étendant ensuite aux transformations de la pyramide triangulaire.

Il nous est impossible de suivre ici l'auteur dans les développemens qu'il donne, et qu'il éclaircit par des figures nombreuses. Partout on rencontre des remarques judicieuses et des vues profondes sur la nature du positif et du négatif, et sur la corrélation des figures. L'auteur promet un traité particulier sur ce dernier sujet. Espérons qu'il remplira sa promesse.

Nous terminerons cette analyse en énonçant le désir qu'une traduction française de l'ouvrage de M. *De Gelder*, le fasse bientôt passer entre les mains de ceux qui ne sont pas familiarisés avec la langue hollandaise (1).

WISKUNDIGE MENGELINGEN, *Mélanges Mathématiques par* R. LOBATTO; *à La Haye et à Amsterdam, chez les frères* Van Cleef, 1823, *in*-8.°

Cet ouvrage étant un recueil de mémoires sur différens sujets, nous ne pourrons en donner une idée qu'en examinant successivement ceux qui nous ont paru les plus importans.

Le premier mémoire contient un exposé complet de la théorie des lignes courbes considérées d'après leur équation polaire. L'auteur a obtenu toutes les formules, notamment celles pour la rectification, la quadrature et la cubature, sans le secours des infiniment petits, et sans partir des formules applicables à un système d'axes rectangu-

---

(1) Nous apprenons que M. *Lobatto* s'est occupé de cette traduction, qu'il doit livrer à l'impression.

laires, ainsi que cela se fait ordinairement dans les Traités du calcul différentiel, mais directement au moyen du théorème de *Taylor*, et de quelques considérations nouvelles. Quoique cette méthode soit, en général moins expéditive que celle des infiniment petits, cependant comme elle se lie plus intimément à l'analyse algébrique, elle produira une conviction plus entière dans l'esprit de ceux à qui cette dernière méthode n'est pas encore assez familière.

Ce traité renferme, en outre, des applications à quelques courbes, et particulièrement à la développante du cercle, déjà traitée par *Diderot*. (Voyez ses mémoires sur différens sujets de Mathématiques.)

Le deuxième mémoire traite de la théorie *des caustiques par réflexion*. La marche analytique suivie à cet égard m'a semblé nouvelle, et préférable à l'emploi des infiniment petits, adopté par les *Bernoulli* et le Marq. *de l'Hôpital*, dans leurs travaux sur cette matière.

Après avoir distingué deux espèces de caustiques; celles qui proviennent de rayons incidens parallèles, et celles où les rayons partent tous d'un seul point donné, M. *Lobatto* considère la première espèce comme *le lieu des foyers des paraboles osculatrices de la courbe réfléchissante*, et la deuxième comme *le lieu des foyers des ellipses osculatrices à cette courbe, qui ont toutes le point lumineux pour foyer commun*. C'est ainsi que l'on considère ordinairement la développante d'une courbe, comme le lieu des cercles osculateurs.

Une double différenciation des équations d'une parabole et d'une ellipse, lui donne alors immédiatement la longueur du rayon réfléchi, les équations et toutes les autres propriétés de la caustique. Il a traité la deuxième espèce de caustiques par leur équation polaire, en prenant le point lumineux pour origine des rayons vecteurs, et les propriétés de l'ellipse lui ont en même-temps servi à en déduire celles de la caustique. Il fait remarquer aussi que dans le cas où le point lumineux est placé en dehors de la courbe, les ellipses osculatrices deviennent des hyperboles : de cette manière la théorie des caustiques se trouve rattachée à celle des sections coniques. Les formules données pour obtenir l'équation différentielle de la caustique de la deuxième espèce, n'ont pas encore été publiées pour autant que je sache. L'auteur a appliqué les résultats de la théorie à différentes courbes, et il termine son mémoire par quelques remarques histo-

riques, en revendiquant en faveur de notre célèbre *Huyghens* la priorité de la découverte de ces courbes, généralement attribuée au médecin allemand *Tschirnhausen*.

Malgré les ingénieuses recherches de M. *Lobatto* sur les caustiques, je regarde comme étant d'une application plus facile la nouvelle théorie dont j'ai essayé de poser les premiers fondemens, et qui a reçu de nouveaux développemens par les recherches et l'élégante analyse de M. *Gergonne* (voyez la Corr. math. I.er et III.e cahiers, ainsi que les Ann. math., mai et juillet). Tout ce qui concerne les caustiques par réflexion ou par réfraction, peut se réduire aux deux théorèmes que j'ai posés en dernier lieu pour les courbes à double courbure. Je ne pense pas qu'aucun autre journal les ait déjà fait connaître (1).

L'auteur donne ensuite un essai d'une trigonométrie rectiligne purement analytique; toutes les formules connues y sont déduites du principe de la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés, combiné avec la formule pour l'expression des sinus de la somme de deux angles, dont il donne en même-temps une nouvelle démonstration synthétique très-simple basée sur une propriété du quadrilatère inscrit dans un cercle.

Les quatrième et cinquième mémoires ont pour objet l'intégration, par une nouvelle méthode, des quantités différentielles $(Az^2+Bz+C)dz$

$$(a+b\cos.\varphi)^n d\varphi,\ \frac{d\varphi}{(a+b\cos.\varphi)^n}\ \text{et}\ \sqrt{\left[\frac{A^2-B^2\sin.^2\varphi}{a^2-b^2\sin.^2\varphi}\right]}\,d\varphi.$$

M. *Lobatto* revient ensuite par des considérations qui lui sont particulières, sur différens résultats de Mécanique que l'on trouve, à la vérité, dans les traités connus; mais auxquels il parvient à ajouter de nouvelles observations. Il a surtout traité avec soin la détermination des centres de gravité et d'oscillation, et il en fait des applications très-intéressantes. Dans le dernier mémoire du recueil qui contient la théorie du mouvement curviligne d'un point attiré vers un centre fixe par une force accélératrice quelconque, l'auteur, au lieu de rapporter les points de la courbe décrite à des axes rec-

(1) M. *Hachette* à qui l'on doit des recherches fort importantes sur les caustiques, vient de nous annoncer qu'il a fait de nos théorèmes l'objet d'un rapport à la *Société philomatique* de Paris.

tangulaires, se sert d'un système de coordonnées polaires où le centre fixe d'attraction est pris pour pôle : partant alors du principe de la proportionnalité des aires des secteurs aux temps employés à les décrire, il arrive à l'expression de la valeur de la force accélératrice en fonction des coordonnées polaires et de leurs différentielles, qui est

$$K = \frac{C^2}{z^5}\left[z^2 + 2\frac{dz^2}{d\varphi^2} - \frac{2d^2z}{d\varphi^2} \right];$$

C désignant l'aire d'un secteur parcouru dans l'unité de temps par le rayon vecteur z. Mettant $\frac{1}{u}$ au lieu de z, on a la formule plus simple

$$K = c^2u^5\left(1 + \frac{d^2u}{ud\varphi^2} \right)$$

on tire de là par une double intégration

$$C'' + \varphi' = \int \frac{du}{\sqrt{C' + C''u^{m-1} - u^2}}$$

Cette équation dans laquelle $K = ku^m$ et $\frac{2k}{(m-1)C^2} = C''$, est propre à obtenir l'équation de la trajectoire, lorsque l'intensité de la force accélératrice et les circonstances à l'origine du mouvement, sont données. Après avoir tiré plusieurs conséquences importantes des formules précédentes, l'auteur en fait l'application à l'ellipse et à la spirale logarithmique, en supposant dans la première de ces courbes, la force attractive tant au centre qu'à l'un des foyers. En résolvant aussi le problème inverse, il prouve que lorsque l'intensité de la force, suit la raison inverse des distances, la trajectoire est toujours une ellipse ou une hyperbole, selon que la force est attractive ou répulsive; que lorsqu'elle suit la raison inverse des quarrés des distances, la trajectoire est nécessairement une section conique, dont le point attirant occupe un des foyers, la nature de la courbe dépendant alors des données à l'origine du mouvement : enfin qu'une force dont l'intensité suit la raison inverse des cubes des distances, peut faire décrire outre la spirale logarithmique encore trois autres courbes différentes.

Nous n'avons pu donner qu'une bien faible idée de toutes les re-

cherches que contient l'ouvrage de M. *Lobatto;* mais ce que nous en avons dit, suffira sans doute pour faire désirer que l'auteur ne s'arrête point dans sa carrière, après avoir débuté d'une manière si heureuse. On doit encore à M. *Lobatto* un *Recueil de problêmes,* imprimé à Bruxelles chez M. *Weissenbruch.* Ce travail moins important que le précédent, n'en sera pas moins très-utile aux jeunes gens qui commencent l'étude de l'Algèbre.

A. Q.

Lèvens-schets van A. G. CAMPER, *door* J. G. S. VAN BREDA, *Gent,* 1825. *Notice sur* A. G. CAMPER, *par M.* VAN BREDA, *professeur ord. à l'Université de Gand.*

Gilles Camper, fils du célèbre naturaliste du même nom, était lui-même un homme très-versé dans les connaissances physiques et naturelles. Son goût pour les sciences et pour les voyages l'avait mis en relation avec la plupart des savans de son temps, et particulièrement avec les *Daubenton,* les *Condorcet* et les *Buffon.* M. *Van Breda* en publiant cette notice historique, a rendu un juste hommage à la mémoire de son beau-père, et a ajouté aux titres qu'il s'était déjà acquis comme littérateur et comme savant.

A. Q.

Dictionnaire portatif de chimie et de minéralogie, 2.me *édit.* 1 *vol. de* 600 *pages, avec* 4 *pl.; par M.* DRAPIER, *Bruxelles, chez* P. J. De Mat, 1825.

Les services que M. *Drapier* a rendus aux sciences, surtout dans ce royaume, sont assez généralement connus pour que nous puis-

sions nous dispenser de les décliner ici. On sait que c'est en grande partie à ses soins que le musée de Bruxelles doit sa réorganisation et l'état florissant où il se trouve actuellement. M. *Drapier* vient d'ajouter encore à ses titres scientifiques, en publiant la 2.e édition de son Dictionnaire de chimie et de minéralogie. Quoique l'objet de cet ouvrage ne rentre pas directement dans le cadre de ce journal, cependant son importance et la nature de différens articles qui s'y trouvent traités, nous font un devoir de le recommander à nos lecteurs : ils y liront avec intérêt les articles : *air, combustion, théorie atomistique, eau, pile galvanique*, etc., ils y trouveront aussi un tableau fort étendu des pesanteurs spécifiques de plus de sept-cents substances différentes. A l'article *aérolithe*, l'auteur donne un catalogue complet de toutes les pierres connues tombées du ciel, soit avant l'ère chrétienne soit après : il indique aussi les principales masses de fer qu'on suppose tombées du ciel. En parlant de la *sonde*, il donne une formule très-élégante de *Lamé* pour déterminer la direction et l'inclinaison d'une couche minérale reconnue par trois trous de sonde. Dans la composition de cet ouvrage qui présente dans un seul volume une espèce d'inventaire de la science telle qu'elle est actuellement, M. *Drapier* a fait preuve d'une érudition très-étendue et d'un discernement heureux dans le choix de ses matériaux : son style comme dans tous ses autres ouvrages, est simple et élégant à la fois, et le dernier mérite quoiqu'accessoire en apparence, n'en est pas moins réel et n'a nullement été négligé par les savans les plus illustres de ces derniers temps.

A. Q.

Académie Royale des sciences et lettres de Bruxelles.

Dans sa séance du 8 octobre 1825, l'académie royale des sciences et lettres de Bruxelles, a nommé correspondans, MM. *Ampere*, membre de l'académie royale des sciences de France; *Bouvard*, membre de la même académie et du bureau des longitudes; *Hachette*, ancien professeur de l'école polytechnique, membre de la

faculté des sciences de l'Université de Paris et du conseil d'agriculture; *Herder*, inspecteur-général des mines en Saxe, et le professeur *Hoken*, rédacteur de l'*Isis*; à cette occasion, elle a arrêté que les mémoires de MM. les Correspondans, seraient insérés dans le volume des memoires des membre résidens.

Dans la même séance, l'Académie a reçu un mémoire de M. *Lobatto*, ayant pour titre : *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques*. MM. *Garnier* et *Quetelet* ont été chargés de faire un rapport.

Analyse des travaux de l'Académie Royale de Paris, pendant l'année 1824.

L'analyse des travaux de l'Académie Royale des sciences de Paris, pendant l'année 1824, se divise en deux titres : *Partie mathématique* et *Partie physique :* la première offre l'état actuel des théories mathématiques et de la physique générale : la seconde est consacrée à la météorologie, à la chimie, à la minéralogie et à la géologie, à la physique végétale et à la botanique, à la zoologie, à l'anatomie comparée, à la médecine et à la chirurgie, enfin à l'agriculture et à la technologie. Celle-là rentre en entier dans notre domaine; celle-ci lui est presque étrangère.

Suivant le rapporteur pour les mathématiques et la physique générale, M. le baron *Fourier*, l'un des secrétaires perpétuels, les ouvrages mathématiques français se répandent de plus en plus dans les Académies et les Universités étrangères : traduits dans la plupart des langues, ils forment la base de l'enseignement des sciences (1).

(1) Cette assertion n'est pas tout-à-fait exacte : il est vrai de dire qu'on a traduit ici comme ailleurs quelques ouvrages des géomètres français : mais il existait déjà dans notre pays des traités plus ou moins étendus. Nous citerons entre autres celui d'*Hennert*, professeur à l'Université d'Utrecht, en dix volumes in-8.°, publié en 1768, et qui embrasse toutes les parties de la science. Cet ouvrage qui, à la vérité, laisse beaucoup à désirer du côté de la correction, pourrait sans beaucoup de travail, être mis au niveau de l'état présent des sciences.

L'institution de l'Ecole Polytechnique de France, a imprimé à l'enseignement des connaissances exactes, un mouvement qui ne s'est point *encore* rallenti (1), et qui se propage dans toute l'Europe : quatre-mille élèves de cette école, ont porté dans les services civils et militaires, les académies et les plus hautes fonctions publiques, dans toutes les professions et tous les arts, les lumières que donne une instruction solide et variée qui atteint presque aux limites actuelles de la science. On a imité dans divers états ce grand établissement et ceux qui se rapportent à nos services publics.

L'étude de l'électricité et du magnétisme, a fait de nouveaux progrès en Europe. Après avoir rappelé la découverte mémorable de M. *Œrsted*, et celle de M. *Ampère* qui a reconnu l'action mutuelle de deux conducteurs voltaïques et celle que le globe terrestre exerce sur un conducteur, M. *Fourier* passant à la théorie des forces qui résident dans les courans voltaïques, théorie due à M. *Ampère*, cite honorablement les ouvrages de MM. *Savary* et *Demonferand*, l'invention de M. *Schweiger*, les applications qu'en a faites M. *Becquerel*, et les travaux de MM. *Seebeck*, *Œrsted* et d'autres physiciens. La théorie du magnétisme a été, dans ces dernières années, l'objet de recherches importantes faites par MM. *Hauy*, *Biot*, *Barlow de Wolwich*, *Poisson* et *Arago*.

Nous avons déjà annoncé ceux de M. le professeur de *Gelder*; nous pourrions en citer d'autres à l'usage des étudians de nos universités, publiés dans le pays et rédigés dans la langue académique. A cette occasion, nous reviendrons sur un ouvrage oublié, c'est-à-dire, sur le traité en trois volumes de *Van Haecht*, à l'usage de l'ancienne Université de Louvain, publié en 1782 et 1784 : à la vérité, il ne contient que l'arithmétique, l'algèbre élémentaire, la géométrie, les élémens des sections coniques et l'optique : mais ce qui est remarquable, on y trouve, ainsi que M. *De Laplace* l'a recommandé long-temps après, la trigonométrie rectiligne placée entre la géométrie des lignes et celle des plans : elle fait le chap. V de la géométrie, et le sixième a pour titre : de *Cycloide*, *Ellipsi*, *Parabola* et *Hyperbola* : viennent ensuite les plans et les volumes. Dans l'algèbre et sous le titre de la multiplication des signes, on rencontre cette démonstration donnée par M. *Laplace* à l'école normale : *sit* + A — A *multiplicandum per* — B; *cum* + A — A *sit nihilum*, *sive zero*, *etiam factum est nihilum*, etc.

(1) Comme nous ne sommes pas astreints à la réserve méticuleuse que le rapporteur a dû s'imposer, nous avons cru exprimer nettement sa pensée, en écrivant le mot encore, en italique.

Des vues nouvelles sur la théorie chimique des atomes moléculaires, confirmées par les analyses les plus exactes, dirigeront les recherches sur ce point.

L'illustre président de la Société Royale de Londres, sir *Humphry Davy* a trouvé un moyen simple de neutraliser l'action de l'eau de la mer sur les enveloppes de cuivre qui doublent les vaisseaux : il consiste à mettre en contact avec une feuille de cuivre d'une grande superficie, un très-petit fragment de zinc ou de fer. C'est au même physicien qu'on doit le moyen de prévenir les explosions funestes dans l'intérieur des mines.

M. *Cagniard de Latour* avait déjà obtenu des effets très-remarquables, en soumettant diverses substances à une forte compression et à de grands changemens de température. Sir *H. Davy* et M. *Faraday* ont produit par l'action des mêmes causes, des résultats qui ont attiré l'attention des Physiciens. On a converti à l'état liquide le gaz acide carbonique et diverses substances aériformes. Ces expériences pourront procurer à la Mécanique industrielle des forces élastiques très-puissantes et déterminées par des changemens médiocres de température. La conversion des gaz en liquides, par un refroidissement considérable, a fourni à M. *de Bussy* des remarques intéressantes. On a lieu de croire aujourd'hui que les gaz appelés permanens et peut-être l'air lui-même, seraient réduits à l'état liquide par la compression et le refroidissement.

M. *Arago* dont les découvertes ont beaucoup étendu la théorie de la polarisation de la lumière et perfectionné l'optique, a fait servir l'étude de ces phénomènes à la solution de plusieurs questions sur la lumière solaire, la scintillation des astres, la formation des anneaux lumineux désignés sous le nom de *Halos*, la comparaison des rayons de lumière émanés de différentes sources. La théorie mathématique de la polarisation de la lumière, doit à M. *Fresnel* des progrès mémorables. Ce physicien a donné plus d'étendue aux applications qui ont pour objet la construction des phrases.

M. le professeur *Pouillet* a entrepris une suite d'observations très-précises qui lui ont servi à déterminer par l'expérience et par le calcul les effets de la chaleur solaire.

On s'est occupé de perfectionner l'hygromètre : on a construit des microscopes catoptriques ou dioptriques.

L'Académie a couronné les recherches de M. *Despretz*, sur la chaleur animale. Le même physicien a publié les résultats de ses expériences sur la densité des différentes vapeurs, et leur chaleur ou latente ou sensible. Nous avons annoncé l'ouvrage de M. *Despretz*.

Le rapporteur énumère ici les travaux des Géomètres français; il analyse briévement le tom. V, de la Mécanique céleste, les recherches de M. *Poisson* sur les forces magnétiques, celles de M. *Cauchy* sur le mouvement des ondes, de M. *Navier* sur la flexion des plans élastiques, et les siennes propres sur les températures terrestres.

Il passe de là à l'exposition des recherches récentes qui intéressent l'astronomie et la météorologie.

L'académie a couronné et elle publie dans la collection de ses mémoires un travail de M. *Damoiseau*, qui a pour objet la formation des tables lunaires, déduite de la seule théorie et d'un petit nombre d'élémens fondamentaux : le même astronome a entrepris d'immenses recherches sur les deux seules comètes dont nous connaissons exactement le cours périodique : la première rappelle les noms illustres d'*Halley* et de *Clairaut*; il en annonce le retour au périhélie, pour l'année 1835, le 16 novembre. La seconde est l'astre singulier dont M. *Enke* a calculé le cours elliptique. Cette comète qui appartient maintenant à notre système planétaire, achève sa révolution en 1200 et quelques jours : on a peu d'espoir de l'observer à son retour prochain, à raison de sa proximité du soleil; mais, suivant l'éphéméride calculée par l'auteur, elle passera de nouveau au périhélie, le 10 janvier 1829: alors elle sera visible dans toute l'Europe. La question de la parallaxe des étoiles fixes, qui est celle de leur distance à la terre, est agitée entre deux savans astronomes, MM. *Pond* et *Brinkley*. L'observation des étoiles multiples, celle des mouvemens propres des astres, et la description physique des cieux, questions qui appartiennent aux études cosmologiques, occupent MM. *South*, son ami *John Herschell* digne d'un aussi grand nom, et M. *Struve*, astronome distingué de Dorpat. On regrette de ne pouvoir citer ici les savantes productions de M. *Bessel* et de plusieurs autres astronomes distingués. Les recherches de la géographie astronomique, s'étendent aujourd'hui à toutes les régions de la terre : il n'y a point de contrée si lointaine qui n'ait reçu les instrumens d'Europe.

En citant les constructions extraordinaires exécutées dans différens états, le rapporteur dit : dans un pays dont la seule existence est un triomphe de l'art, le nouveau canal d'Amsterdam au Helder, est ouvert aux grands bâtimens de commerce.

On a fait de nouveaux progrès dans la description géodésique de la France. L'Angleterre, l'Allemagne, les Pays-Bas (1), l'Italie ont acquis par des méthodes semblables la description géométrique de leur territoire. Les points principaux de cet immense réseau de figures géométriques, qui couvre une partie de la terre habitée par tant de nations puissantes, ont été désignés par des marques durables qu'il sera toujours possible de reconnaître.

Le rapporteur termine cette première partie par l'énumération des travaux hydrographiques et géographiques, et par une analyse rapide des voyages de découvertes dans les régions du globe dont la connaissance est utile à toutes les nations.

Ainsi, dit-il, les sciences mécaniques et physiques rapidement perfectionnées, procurent à la société des avantages qu'il eût été impossible de prévoir, il y a un siècle; et chaque découverte est une source féconde de puissance et de richesse. Le temps des grandes applications des sciences est arrivé : leurs progrès occupent et intéressent les gouvernemens et les peuples.

Le surplus du rapport est consacré à l'analyse des ouvrages des membres de l'académie et des rapports sur les ouvrages et mémoires qui lui ont été présentés pendant l'année.

L'analyse de la partie physique, est dûe à M. *le baron Cuvier* : elle ne nous fournira qu'une seule citation. M. *Romain Feburier*, connu par plusieurs recherches de physiologie végétale, et auteur d'un petit traité sur cette matière, assure avoir fait des expériences d'où il résulte que les anthères des plantes sont électrisées positivement, et que le pistil l'est négativement, et que c'est la raison pour laquelle le pollen des anthères est attiré par le stigmate.

Dans une note sur l'article *Statistique* de M. *Quetelet*, pag. 217, nous avons promis d'indiquer le but des recherches qui constituent cette science (2). 1.° Elle a pour objet de rassembler et de présenter

(1) Nous ferons connaître ceux qui ont été exécutés dans notre pays.

(2) Nous empruntons ce qui suit du même rapport.

avec ordre les faits qui concernent directement *l'Économie civile*, elle observe et décrit les propriétés du climat, la configuration du territoire, son étendue, ses divisions naturelles ou politiques, la nature du sol, la direction et l'usage des eaux. 2.° Elle énumère la population, et en distingue les différentes parties, sous les rapports du sexe, de l'âge, de l'état de mariage, et de la condition ou profession. 3.° Elle montre l'état et les progrès de l'agriculture, ceux de l'industrie et du commerce, et en fait connaître les procédés, les établissemens et les produits. 4.° Elle indique l'état des routes, des canaux et des ports. 5.° Les résultats de l'administration des secours publics. 6.° Les établissemens destinés à l'instruction. 7.° Les monumens de l'histoire des arts. Ainsi cette science uniquement fondée sur des faits, a pour but de reconnaître et de constater les effets généraux des institutions civiles et tous les élémens de la puissance respective et de la richesse des nations : elle diffère beaucoup de celle de l'*économie politique* qui examine et compare les effets des institutions, et recherche les causes principales de la richesse et de la prospérité des peuples. *L'Arithmétique politique*, c'est-à-dire, l'application de l'analyse mathématique, à un certain ordre de faits civils, doit être encore distinguée de la statistique : cette analyse dirige utilement les recherches sur la population et sur d'autres objets qui intéressent l'économie publique : elle indique dans ces recherches les élémens qu'il importe le plus d'observer, leur dépendance réciproque, et le nombre d'observations nécessaires pour acquérir un degré donné de certitude; elle détermine la durée moyenne de la vie, celle des mariages ou associations, le nombre d'hommes d'un âge donné, le rapport de la population totale au nombre moyen des naissances annuelles. La statistique admet ces résultats, sans les envisager sous le point de vue théorique.

J. G. G.



M. *Hachette*, l'élève et l'ami de l'illustre *Monge*, ancien professeur à l'Ecole Polytechnique, connu dans les sciences par des travaux qui lui ont mérité les suffrages de la grande majorité des

membres de l'Institut, pour être admis dans cette illustre compagnie, suffrages auxquels il n'a manqué que l'approbation royale, vient de nous adresser des exemplaires d'un mémoire imprimé, *sur les divers modes de numérotage employés dans les filatures et dans les tréfileries* : il se compose des titres suivans : 1.° Du mode de numérotage adopté pour les fils non-métalliques. Définition du numéro de ces fils : 2.° Des numérotages usités dans le commerce pour le coton, pour le fil de laine, pour la laine peignée, pour le fil de lin, pour les fils de soie : 3.° Du titre du fil simple de cocon : 4.° Résumé. On voit, dit l'auteur, que pour indiquer les titres des fils de coton et de laine, le poids du fil est constant, et sa longueur est variable; c'est le contraire pour le lin et la soie; la longueur du fil est constante et le poids mesure le titre. La seconde partie du mémoire présente les titres : 1.° Numérotage des fils métalliques en cuivre ou en fer (la manufacture où l'on convertit ces métaux en fil, se nomme *Tréfilerie*) : 2.° du passage du système de numérotage des tréfileries au numérotage métrique : 3.° De la manière de déduire le diamètre d'un fil métallique de son numéro métrique ou de son numéro de tréfilerie : 4.° Examen et comparaison des divers modes de numérotage : 5.° Conclusion que nous rapporterons en entier : ce mémoire n'avait pas seulement pour objet de faire connaître et de comparer les divers système de numérotage en usage dans le commerce, et d'indiquer celui qui présente le plus d'avantage : je me suis encore proposé : 1.° de fournir aux consommateurs de fils, les moyens de vérifier eux-mêmes, à l'aide de la balance et d'une mesure linéaire, les titres de tous les fils, quels que soient les numéros sous lesquels ils sont désignés dans le commerce : 2.° d'appeler l'attention de l'administration publique sur le choix du meilleur système de numérotage, applicable à tous les fils : 3.° de fixer les valeurs actuelles des numéros usités, afin de pouvoir les comparer aux valeurs anciennes, ou à celles qu'ils prendraient à d'autres époques, et prévenir ainsi les mécomptes qui résultent de l'arbitraire des numérotages.

Ce travail de M. *Hachette* sera un élément précieux d'instruction pour les élèves appelés à suivre les cours de Mécanique industrielle qui s'ouvriront incessament dans nos Universités.

J. G. G.

M. *Hachette*, comme membre du conseil d'Agriculture, a publié une description géométrique de la partie d'une charrue, qu'on nomme *versoir* ou *oreille*. « Les premières recherches sur cette ques-
» tions, paraissent dûes à *Arbuthnot*, écuyer anglais, membre de la
» Société Royale de Londres; elles sont l'objet d'un mémoire publié
» en 1774, dans le volume du Journal de physique de cette année,
» deuxième sémestre. M. *Jefferson*, ancien président des États-Unis
» d'Amérique, a publié, il y a vingt ans, un mémoire sur cette par-
» tie de la charrue. M. *Guillaume*, célèbre agriculteur de France,
» a exécuté ce versoir et l'a adapté à une charrue de son invention,
» c'est au célèbre M. *Thouin*, si honorablement connu et si sincère-
» ment regretté dans notre pays, qu'on doit la publication du mé-
» moire de M. *Jefferson*.

» Cet écrit a principalement pour objet de diriger l'ouvrier char-
» gé de l'oreille ou versoir, de lui apprendre à transformer un bloc
» de bois à surfaces planes, en un solide terminé par une *surface*
» *courbe réglée* (1). On reconnaît par l'exposé du mode de géné-
» ration de cette surface, qu'elle ne diffère pas de la surface du
» second degré, connue des géomètres sous le nom de *plan gauche*,
» et qui jouit de cette propriété de pouvoir être engendrée de deux
» manières par une droite mobile constamment parallèle au même
» plan. » M. *Hachette* donne dans une note les équations des surfaces opposées qui composent le versoir de *Jefferson*.

J. G. G.

L'illustre *Laplace* vient de completter le Traité de la mécanique céleste par la publication du cinquième volume qui renferme six livres qui sont les XI, XII,... et XVI. Le livre XI traite de la figure et de la rotation de la terre : le livre XII, de l'attraction et

---

(1) On sait qu'on divise le genre *des surfaces réglées*, en trois espèces : *le plan*, *les surfaces développables* et *les surfaces gauches*.

de la répulsion des sphères et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques. Le livre XIII, des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes; le livre XIV, des mouvemens des corps célestes autour de leurs centres de gravité; le livre XV, du mouvement des planètes et des comètes; enfin le livre XVI du mouvement des satellites. Chacun de ces livres est divisé en plusieurs chapitres. Ce volume est de 420 pages.

J. G. G.

Questions à résoudre.

1.° On sait que la terre fait sa révolution annuelle dans une ellipse dont le soleil occupe un des foyers: cela posé, on demande s'il peut exister dans l'espace, un point tel que la différence des rayons vecteurs, menés du centre de la terre au centre du soleil et à ce point fixe, demeure constamment la même. S'il existe dans l'espace plusieurs points qui jouissent de la même propriété, on propose d'assigner leur lieu géométrique.

2.° On a b litrons d'eau dans m vases; on prend du premier vase pour verser dans les $m-1$ autres, de manière que chacun de ceux-ci renferme a fois autant d'eau qu'il en contenait auparavant; on fait la même opération avec le second vase, puis avec le 3.me, le 4.me, le 5.me....., le m.me Après avoir recommencé ces m opérations successives, $n-1$ autres fois, les vases contiennent chacun la même quantité d'eau; on demande combien chacun en contenait avant la première opération (1).

---

(1) L'énoncé de cette question, pag. 120, avait été omis à la fin du cahier.

Fig. 24

Fig. 26.

Fig. 39.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

On a ces formules connues

$$\sin.(a+b)\sin.(a-b)=\sin.^2a-\sin.^2b$$
$$\sin.(b+c)\sin.(b-c)=\sin.^2b-\sin.^2c$$
$$\sin.(c+d)\sin.(c-d)=\sin.^2c-\sin.^2d$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin.(p+a)\sin.(p-a)=\sin.^2p-\sin.^2a$$

dont l'addition donne

$$\sin.(a+b)\sin.(a-b)+\sin.(b+c)\sin.(b-c)+\ldots..$$
$$+\sin.(p+a)\sin.(p-a)=0$$

les arcs $a, b, c \ldots.. p$ sont portés bout-à-bout, et au dernier p succède l'arc a. Si l'on pose $a=0, b=\frac{\pi}{n}, c=\frac{2\pi}{n}, d=\frac{3\pi}{n}$, etc., la formule précédente deviendra

$$-\sin.\left(\frac{\pi}{n}\right)\left\{\sin.\frac{\pi}{n}+\sin.\frac{3\pi}{n}+\sin.\frac{5\pi}{n}+\sin.\frac{7\pi}{n}+\ldots\sin.\left[\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]\right\}=0$$

d'où l'on conclut

$$\sin.\frac{\pi}{n}+\sin.\frac{3\pi}{n}+\sin.\frac{5\pi}{n}+\sin.\frac{7\pi}{n}+\ldots+\sin.\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right)=0$$

on observera que $\frac{2n-1}{n}$ est le terme général des coefficiens numériques de π, et que l'arc $2\pi-\frac{\pi}{n}$ augmenté de $\frac{2\pi}{n}$ fait la circonfé-

rence augmentée de l'arc $b=\frac{\pi}{n}$ qui remplace $a=0$. Reprenons les formules

$$\sin.(k+m)=\sin.k\cos.m+\sin.m\cos.k$$
$$\sin.(k+3m)=\sin.k\cos.3m+\sin.3m\cos.k$$

....

....

ajoutons et faisons $m=\frac{\pi}{n}$: nous aurons, d'après la série ci-dessus,

$$\sin.\left(k+\frac{\pi}{n}\right)+\sin.\left(k+\frac{3\pi}{n}\right)+\sin.\left(k+\frac{5\pi}{n}\right)+\ldots\sin.\left(k+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)=0$$

Posons $k+\frac{\pi}{n}=q$ et $r=\frac{2\pi}{n}$: il viendra

$$\sin.q+\sin.\left(q+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin.\left(q+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin.\left[q+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=0$$

Soit enfin $q=f+\frac{2\pi}{n}$, et on trouvera

$$\sin.\left(f+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin.\left(f+\frac{4\pi}{n}\right)+\sin.\left(f+\frac{6\pi}{n}\right)+\ldots\sin.(f+2\pi)=0$$

Faisons $f=f'-\frac{\pi}{2}$, et nous aurons

$$\sin.\left(f+\frac{2\pi}{n}\right)=\sin.\left(f'+\frac{2\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos.\left(f'+\frac{2\pi}{n}\right);$$
$$\sin.\left(f+\frac{4\pi}{n}\right)=\sin.\left(f'+\frac{4\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos.\left(f'+\frac{4\pi}{n}\right)$$

....

$$\ldots\ldots\sin.(f+2\pi)=\sin.\left(f'+2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos.(f'+2\pi):$$

en sorte que la dernière formule se change dans la suivante

$$(A)\ldots\cos.\left(f'+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos.\left(f'+\frac{4\pi}{n}\right)+\cos.\left(f'+\frac{6\pi}{n}\right)$$
$$+\ldots\ldots\cos.(f'+2\pi)=0$$

d'où l'on peut tirer cette conséquence curieuse : *si on divise* (*fig.* 31) *la circonférence* ABCD... *du rayon* R *en* n *parties égales, et qu'on lui*

inscrive le polygone ABCD....., *si sur une circonférence concentrique du rayon* r, *on prend arbitrairement un point* K *et qu'on le joigne aux sommets* A, B, C..... *on aura*

$$\overline{AK}^2+\overline{BK}^2+\overline{CK}^2+\overline{DK}^2+\overline{EK}^2+\overline{FK}^2+\text{etc.}=n(R^2+r^2)$$

En effet, on a (Trigon.)

$$\overline{AK}^2=\overline{OA}^2+\overline{OK}^2-2OA\times OK\cos.AOK$$
$$\overline{BK}^2=\overline{OB}^2+\overline{OK}^2-2OB\times OK\cos.BOK$$
$$\overline{CK}^2=\overline{OC}^2+\overline{OK}^2-2OC\times OK\cos.COK$$

....

....

Ajoutant ces égalités, posant l'angle constant FOK $=f'$ et FOA $=$ AOB $=$ BOC $=$ COD etc. $=\frac{\pi}{n}$, on trouvera

$$\overline{AK}^2+\overline{BK}^2+\ldots=n(R^2+r^2)-2Rr\left[\cos.\left(f+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos.\left(f+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos.(f'+2\pi)\right]$$

égalité qui, d'après la formule (A), se réduit à la propriété (*) énoncée.

J. O. G.

(*) On peut voir sur ce théorème la pag. 256 du XV.e volume des Annales mathématiques de M. *Gergonne*, et la pag. 129 du tom. XVI.e du même recueil où on trouve la solution étendue au cas de la somme des puissances $2m$ des distances du point K aux sommets des angles du polygone régulier, avec l'analyse préliminaire appropriée à ce cas.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Solution de la question proposée, pag. 112.

Nous avons donné pag. 274, une solution géométrique de cette question et nous avons alors promis de la traiter par l'analyse appliquée.

Prenons PBX pour axe des x et PAY pour celui des y (plan. IV, *fig.* 29), et représentons l'équation de la courbe par

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \ldots\ldots (1):$$

il est clair que l'équation

$$cx^2+ex+f=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

aura pour racines $PC=m$, $PB=n$, et que celles de

$$ay^2+dy+f=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

seront $PD=m'$ et $PA=n'$, en observant que l'équation (2) résulte de (1) sous l'hypothèse $y=0$, et que (3) dérive de (1) pour $x=0$. Connaissant ainsi les coordonnées n et n', m et m' des deux points A et B, D et C par lesquels sont menées les cordes AB et DC, il sera facile d'en former les équations : en effet, celle de AB étant de la forme

$$Ay+Bx=C, \text{ d'où } y+\frac{B}{A}x=\frac{C}{A} \ldots\ldots (4)$$

on a $x=\frac{C}{B}=n$ pour $y=0$, et à $x=0$, répond $y=\frac{C}{A}=n'$: par ces substitutions, l'équation (4) devient

$$ny+n'x=nn', \text{ ou } \frac{y}{n'}+\frac{x}{n}=1\ldots\ldots\ (5)$$

On trouve ainsi

$$my+m'x=mm', \text{ ou } \frac{y}{m'}+\frac{x}{m}=1\ldots\ (6)$$

pour équation de DC (*). Ajoutant ces équations membre à membre, on obtient

$$\left(\frac{m'+n'}{m'n'}\right)y+\left(\frac{m+n}{mn}\right)x=2\ldots\ (7)$$

mais, en vertu des équations (2) et (3), on à

$$m+n=-\frac{e}{c},\ mn=\frac{f}{c},\ m'+n'=-\frac{d}{a},\ m'n'=\frac{f}{a}$$

par ces substitutions, (7) se transforme dans celle-ci

$$dy+ex+2f=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Et il s'agit de prouver que cette équation qui est à la droite des points de concours E des cordes AB et DC, (**), est celle de la droite qui passe par les points t et T dans lesquels la courbe est touchée par les deux tangentes qui lui sont menées du point P donné. A cet effet, on se rappellera que l'équation générale de la tangente à un point $x'y'$ de la courbe, représentée par (1), est

$$2ayy'+b(xy'+yx')+2cxx'+d(y+y')+e(x+x')+2f=0\ldots\ (9)$$

Or, si l'on veut que la tangente passe par le point P dont les coordonnées sont $y=0$ et $x=0$, cette équation se reduira à la suivante

$$dy'+ex'+2f=0$$

qui repète (8), et d'où l'on conclut que les points de contact t et T sont sur la droite des points E.

Le point F est déterminé par la rencontre des droites AC et BD

(*) On imaginera la corde DC prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre AB.

(**) Cette proposition très-simple dans le cas des cordes parallèles, est celle que nous avons supposée pag. 274, du n.° précédent.

qui ont pour équations

$$my + n'x = mn' ;\ ny + m'x = m'n$$

d'où l'on déduit ces coordonnées du point F, savoir :

$$x = \frac{mn(n' - m')}{nn' - mm'},\ y = \frac{m'n'(n - m)}{nn' - mm'} \ldots\ (10)$$

dont la substitution satisfait à l'équation (7) qui a la même signification que (8); en sorte que le point F et ses analogues I, etc. sont situés sur la droite qui contient le point E et les points de contact T et *t*. On peut déduire de cette analyse plusieurs autres conséquences curieuses.

Newton a donné dans le livre des principes, une transformation particulière des lieux géométriques dont nous ferons quelques applications, et qui a pour but de changer les figures en d'autres plus commodes à traiter et telles que l'on puisse facilement repasser des résultats qu'elles fournissent, à ceux qui conviennent aux données primitives. On reconnaît l'analogie de ce procédé avec celui de M. *Dandelin*.

J. G. G.

Suite et fin du mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en Géométrie, par M. Dandelin (*), (Corresp. p. 256 et suiv.) *Extrait par M.* A. Quetelet.

Des cônes passant par deux cercles : divers problêmes et théorèmes.

16. Par deux cercles *a* et *b* on peut toujours faire passer deux systêmes de droites formant deux cônes dont les sommets sont sur la droite qui passe par les pôles A et B de ces cercles (*fig.* 32) (**).

(*) Le mémoire dont nous donnons ici un extrait, est destiné à paraître dans le 4.e volume de l'Acad. Royale des sciences et belles-lettres de Brux.

(**) Il sera bon de se rappeler la notation contenue au parag. 3.

Menons par la droite AB un plan quelconque coupant la sphère suivant le cercle C. Ce cercle coupera les cercles a et b normalement; ainsi dans la projection, les rayons $B'd'$, $A'g'$, $A'e'$ seront tangens au cercle C'. Menons dans le plan c les droites gd et de; elles rencontreront la droite AB, l'une en f, l'autre en h, et dans la projection, les angles $A'g'h'$ et $B'd'h'$ étant supplémens l'un de l'autre, on a par un théorème des transversales

$$\frac{A'g'}{B'd'}=\frac{A'B'}{B'h'}+1;$$

d'où il suit que quelque soit la position du cercle c, pourvu qu'il passe par la droite des pôles, $B'h'$ et par suite Bh seront constans: il en est de même de $B'f'$ et Bf.

Les points f et h resteront donc fixes, quel que soit le cercle c, et par conséquent toutes les droites dg et de, menées comme nous venons de le voir, forment deux systèmes de droites concourantes et par conséquent deux cônes dont l'un a son sommet en h et l'autre en f.

Nous conserverons à la droite AB le nom d'axe par rapport à ces cônes, quoique généralement ils soient obliques.

17. Les cônes passant par deux cercles, jouissent de diverses propriétés dont nous énoncerons quelques-unes.

Si par le sommet d'un de ces cônes, on mène un plan tangent au cône, ce plan coupera la sphère suivant un cercle tangent aux deux cercles générateurs du cône; et tous les cercles ainsi construits, ayant leurs plans assujettis à passer par un point fixe, qui est le sommet du cône, ont tous leurs pôles sur un même plan (4).

Mais, avec un peu d'attention, on voit que si on conçoit le cône qui touche la sphère suivant le cercle a, et celui qui la touche suivant le cercle b, tout point de l'intersection de ces deux cônes, sera le pôle d'un cercle tangent aux cercles a et b; car d'abord ce pôle sera à égales distances des circonférences des deux cercles, puisque ces distances sont mesurées par les longueurs de deux tangentes à la sphère, menées d'un même point, et ensuite le cercle dont il est le pôle, aura un rayon commun avec chacun des cercles a et b, d'où résulte :

1.° Que tous les pôles des cercles tangens à deux cercles fixes sur

la sphère, se trouvent sur l'intersection des cônes qui touchent la sphère suivant ces deux cercles.

2.° Que tous les points de cette intersection, sont sur deux plans, qui ont pour pôles respectifs les sommets des deux cônes qu'on peut faire passer par les deux cercles.

3.° Que la droite AB et celle qui est l'intersection des plans des cercles *a* et *b*, sont réciproquement polaires l'une de l'autre (5).

4.° Que deux cônes droits tangens à la sphère, se coupent suivant deux courbes planes, passant toutes deux par la ligne d'intersection des plans des cercles suivant lesquels les cônes touchent la sphère.

5.° Que les deux points dans lesquels le cercle arbitraire touche les deux autres, se trouvent toujours sur une même arrête de l'un des deux cônes.

Ceci sert à reconnaître, dans les projections, quels sont les points appartenant à la fois aux deux cercles et à une arrête.

6.° Que si l'on mène deux cônes passant, l'un par les cercles *a* et *c*, l'autre par les cercles *b* et *c*, la droite qui joint les sommets de ces deux cônes, se trouve évidemment dans le plan des droites AC et BC, qui a pour pôle le sommet de l'angle trièdre formé par les plans *a*, *b*, *c*; et par conséquent tous les plans qui ont leurs pôles sur cette droite, passeront par le sommet de cet angle trièdre.

7.° Si par l'axe du cône, on mène un plan quelconque, il coupera les cercles *a* et *b* sous des angles égaux.

18. En effet, par l'arrête du cône qui correspond à ce plan, menons un plan tangent au cône oblique; ce plan tracera sur la sphère un cercle tangent aux deux autres, ou, en d'autres termes, qui les coupera sous un angle nul : mais le cercle du plan sécant dont nous venons de parler, coupera ce dernier suivant des angles égaux; donc il coupera aussi les cercles *a* et *b* sous des angles égaux.

En partant de ces diverses propositions et en s'aidant toujours de la considération des projections stéréographiques, M. *Dandelin* résout successivement d'une manière très-simple, plusieurs problêmes très-importans, tels que l'époque du plus court crépuscule pour une latitude donnée; le cercle tangent à trois autres, etc. Il donne de ce dernier problême jusqu'à trois solutions différentes : nous nous contenterons d'en indiquer une seule.

Concevons les trois cercles *a*, *b*, *c* dont les cercles *a'*, *b'*, *c'* seraient

les projections stéréographiques, et imaginons que l'on ait mené deux cônes, l'un par les cercles *a* et *c*, l'autre par les cercles *b* et *c* (*fig.* 33).

Si par la droite qui joint les sommets *e* et *f* de ces deux cônes, on mène un plan tangent à l'un d'eux, ce plan sera aussi tangent à l'autre, et par conséquent le cercle suivant lequel il coupera la sphère, sera tangent aux trois cercles *a*, *b*, *c*. Cherchons le point γ où il touche le cercle *c*.

Imaginons qu'on ait prolongé le plan *c* et la droite *ef* jusqu'à ce qu'ils se coupent en *i*, puis par le point d'intersection menons $i\gamma$ tangent au cercle *c*; ce sera évidemment la trace du plan tangent aux deux cônes, et par conséquent le point γ où elle touchera le cercle *c*, sera le point de contact cherché.

La corde qui renferme ce point γ, aura donc *i* pour pôle, dans le plan du cercle *c* : elle sera donc comprise dans le plan dont *i* est le pôle, et ce dernier plan devra passer par le sommet S de l'angle trièdre formé par les trois plans *a*, *b*, *c* (17, 6.°). Il en résulte que la corde qui passe par le point γ et qui a *i* pour pôle, doit aussi passer par le point S.

Ceci nous suffit pour résoudre notre problême. En effet, puisque la corde passant par le point γ et le point S, a son pôle en *i*, la perspective passera par S' et aura son pôle en *i'* : nous ne connaissons pas *i'* à la vérité, mais nous savons qu'il doit être sur la droite *e'f'i'* : ainsi la droite $S'\gamma'$ doit passer par le pôle F' de la droite *e'f'*; or, ce pôle est connu (7), le point S' l'est aussi (15) : si donc on mène la droite S'F', elle coupera le cercle *c* en deux points γ, qui seront chacun un des points dans lesquels le cercle *c* peut être touché par un cercle tangent à la fois aux trois cercles *a*, *b* et *c*.

Cette solution nous a semblé remarquable par son élégance et sa simplicité; elle est en même temps assez générale pour s'appliquer à tous les cas possibles, et c'est peut-être un des exemples les plus intéressans de l'emploi des projections stéréographiques.

19. En combinant cette solution avec le principe énoncé à la page 264 du numéro précédent de la Corresp. Math., on parvient à démontrer d'une manière très-simple un théorème qui a été remis deux fois sans succès au concours de l'Université de Gand (voyez le même

numéro, pag. 282), théorème que j'avais démontré d'une autre manière encore (*).

Nous venons de voir que la droite $\gamma'S'$ qui contient le point de contact γ', doit passer par le pôle F′ et par la projection S' du sommet de l'angle trièdre des trois plans a, b, c. Or, le point F′, pôle de la droite $f'e'$, n'est que le point d'intersection des deux cordes mn et pq; d'une autre part, le point S′ est l'intersection de deux droites qui sont les lieux de tous les points d'intersection des couples de cordes appartenant en commun aux trois cercles fixes et à un quatrième variable (cahier précédent, parag. 15). Mais ces deux droites sont par leur nature parallèles aux deux systèmes de cordes mn et $m'n'$, pq et $p'q'$: de plus elles partagent l'intervalle des deux cordes de chaque système en deux parties égales. La similitude des figures prouve alors que la droite F′S′ prolongée doit passer par le point d'intersection des deux cordes $m'n'$ et $p'q'$; elle passe de plus par le point d'intersection des deux tangentes nn' et pp'. Or, parmi tous les points symétriquement placés de cette manière, il suffit d'en connaître deux pour déterminer la position de la droite $\gamma'S'$ qui les contient, par exemple F et φ. Il est bon cependant d'observer que cette construction devient illusoire, quand un des cercles embrasse les deux autres.

Nous ferons une autre observation; c'est qu'en joignant le point γ' aux points e' et f', les droites coupent les deux autres cercles aux autres points de contact α' et β', ce qu'on peut démontrer assez facilement de la manière suivante : le plan du cercle tangent $\alpha\beta\gamma$, qui contient la droite ef et qui est tangent sur la sphère aux deux cônes dont les sommets sont en e et f, touche ces cônes selon deux droites $e\gamma\alpha$ et $f\gamma\beta$ qui contiennent les points de contact α, β et γ. Ce qui a lieu sur la sphère, aura encore lieu pour la projection, et les points de contact α' et γ', β' et γ' seront sur deux droites avec les sommets e' et f'.

Des sections coniques.

20. Soient une sphère, un cône droit tangent à cette sphère suivant un cercle s, et un plan tangent à la sphère en F : prenons ce plan pour tableau.

(*) Voyez les Annales belgiq. tome IV, pag. 87.

Il est d'abord évident que tous les cercles dont les pôles seront sur l'intersection du cône et du plan, toucheront le cercle *s* et passeront par le point F. Dans les projections stéréographiques sur le plan de la courbe d'intersection, tous ces cercles seront représentés par des cercles dont les centres seront sur la courbe même. Cette courbe est donc le lieu de tous les centres des cercles assujettis à passer par le point F, et à toucher le cercle *s'* projection du cercle *s*, et dont le centre sera S' projection du point S. Les points S' et F sont les foyers de la section conique : de là cette propriété curieuse (*) :

Si l'on mène une sphère tangente à un cône droit et à un plan qui coupe le cône, la section conique aura pour foyer le point de contact de la sphère et du plan, et la projection stéréographique du sommet du cône sur ce plan.

On prévoit facilement comment ce théorème se modifie selon les diverses positions que peut prendre le plan sécant.

21. Ce théorème se généralise d'une manière curieuse. Nous avons vu que deux cônes droits tangens à une même sphère suivant des cercles *a* et *b*, se coupent suivant deux courbes planes. Il est facile de voir de plus, et nous l'avons également fait remarquer, que tous les points de ces courbes, sont les pôles de cercles tangens aux cercles *a* et *b*. Si l'on projette stéréographiquement tout ce système sur un plan quelconque, les projections de ces courbes seront les lieux des centres de deux systèmes de cercles tangens aux deux cercles *a'* et *b'*. D'où il suit que les projections seront elles-mêmes des sections coniquès dont les foyers seront A' et B', projections des sommets A et B des deux cônes.

Si l'un de ces cônes devenait un plan, il en serait de même; d'où l'on peut conclure ce nouveau théorème : toute section conique dont le plan touche une sphère au foyer de la section, se projette stéréographiquement suivant une autre section conique dont le foyer est précisément la projection du foyer de la première.

22. M. *Dandelin* applique encore ces théorèmes et particulièrement

(*) Voyez le rapport fait à la Société philom. de Paris, par M. *Hachette*, et inséré dans ce cahier.

le dernier à la résolution d'un grand nombre de problêmes dont plusieurs nous ont paru nouveaux : nous nous contenterons de citer les suivans :

Quatre tangentes à une section conique étant données ainsi que son foyer F, concevons les trois triangles rectangles F*ad*, F*be*, F*cf*, ayant tous trois leur angle droit en F, chacun un angle aigu sur la même tangente *fd*, et l'autre angle aigu sur un des sommets du triangle *abc*, formé par ces trois autres tangentes, les trois hypothenuses de ces tangentes, sont concourantes en *i*.

23. Soient deux tangentes *adb*, *ceb* et le foyer F. Si l'on mène une troisième tangente *de*, quelque soit sa position, l'angle *e*F*d* qui s'appuie sur la partie interceptée entre les deux premières tangentes, sera constant. D'où résulte cette autre proposition :

Les angles *a*F*b* et *b*F*c*, formés en menant du foyer trois droites aux deux points de contact des premières tangentes et à leur point d'intersection, sont des angles égaux.

Si la droite *ac* qui joint les points de contact, est un diamètre, l'angle *a*F*c* est coupé en deux parties égales par une parallèle à son conjugé.

24. Soient deux diamètres conjugés *ab* et *de* d'une section conique, et menons une perpendiculaire *cf* au milieu du premier : l'hyperbole équilatère qui aura *cf* et *cb* pour asymptotes et qui passera par le point *e* où le diamètre *de* coupe la section conique donnée, passera encore par le foyer de cette section.

Il suit de là que le diamètre *de* restant le même, tandis que l'autre diamètre *ab* varierait de longueur, en conservant pourtant la même direction, la courbe varierait de manière à ce que son foyer décrivît l'hyperbole équilatère.

Tel est à peu près le contenu du premier mémoire de M. *Dandelin*, sur les projections stéréographiques : comme l'auteur se propose de revenir sur le même sujet, nous aurons soin de faire connaître successivement ses nouvelles recherches, en profitant des documens que son amitié veut bien nous confier (*).

(*) On trouve dans les *Annales belgiques des sciences, lettres et arts*, III.e liv. mars 1820, page 204, une solution par M. *Timmermans*, de cette question : *deux droites et un point étant donnés, mener par ce point une droite qui aille*

De quelques usages des premières puissances des nombres naturels, dans la Géométrie et la Mécanique; par M. NOEL, *professeur des Sciences Physiques et Mathématiques, principal de l'Athénée de Luxembourg*, faisant suite et fin aux recherches consignées (Corr. Math. et Phys. n.° III, pag. 124 et n.° IV, pag. 199).

11. Voyons maintenant comment on détermine les momens d'inertie au moyen du principe du n.° 5, pag. 127 du III.e n.° de la *Correspondance Mathématique et Physique.*

Soient m', m'', m''', ..., les masses des molécules d'un corps de figure connue, et d', d'', d''', ..., leurs distances à un axe proposé. On appelle *moment d'inertie du corps, par rapport à cet axe,* la somme $m'd'^2 + m''d''^2 + m'''d'''^2 + \dots$, qu'on représente, pour abréger, par $S(md^2)$, en énonçant *somme de md*². De même, $S(m)$ exprime la somme des masses des molécules du corps proposé et désigne la masse M du même corps.

12. Quand on connaît le moment d'inertie d'un corps, par rapport à l'axe qui passe par son centre de gravité, on trouve facilement le moment d'inertie de ce corps, par rapport à un autre axe parallèle au dernier, et réciproquement.

En effet soient (*fig.* 34) m', m'', m''', m'''', ..., les masses des molécules d'un corps de figure invariable; soit A un axe perpendiculaire en I à un plan donné P; soient M', M'', M''', M'''', ..., les projections sur ce plan des molécules m', m'', m''', m'''', ..., et O la projection

---

passer par le point de concours des deux droites qu'on ne peut prolonger. Cette solution très-simple est étendue aux deux cas où le point est intérieur et extérieur aux droites. M. *le commandeur de Nieuport,* en a donné une solution analytique. C'est le Théor. I, énoncé pag. 262, du n.° V de notre Corresp. Dans la prochaine livraison, nous en donnerons une solution déduite des notions les plus simples de la perspective.

J. G. G.

du centre de gravité du corps. Si nous menons par O un axe A′ parallèle à A, et conséquemment perpendiculaire au plan P, il est clair que $IO = a$ sera la distance entre les axes A et A′, et que $IM' = d'$ et $OM' = b'$ seront les distances de la molécule m' aux mêmes axes; ainsi des autres. Cela posé, menons les perpendiculaires $M'p'$, $M''p''$, $M'''p'''$, $M''''p''''$ .... sur la droite IOK; les triangles IOM', IOM'', IOM''', IOM'''', ..., donneront :

$$\left.\begin{array}{l} d'^2 = a^2 + b'^2 - 2a \times Op' \\ d''^2 = a^2 + b''^2 - 2a \times Op'' \\ d'''^2 = a^2 + b'''^2 + 2a \times Op''' \\ d''''^2 = a^2 + b''''^2 + 2a \times Op'''' \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Multipliant ces équations respectivement par m', m'', m''', m'''', ..., et ajoutant, on aura

$$S(md^2) = a^2 S(m) + S(b^2 m) - 2a(m'.Op' + m''.Op'' - m'''.Op''' - m''''.Op'''' \ldots)$$

Le multiplicateur de $2a$ désigne la somme algébrique des momens des molécules du corps proposé, par rapport au plan mené par le centre de gravité de ce corps, perpendiculairement à IO. Or, la somme de ces momens est égale à celui de la masse M du même corps; et comme ce dernier moment est nul, il s'ensuit que le multiplicateur de $2a$ est nul aussi; on a donc sinplement, à cause de $S(m) = M$,

$$S(md^2) = a^2 M + S(b^2 m).$$

Cette équation nous apprend que *le moment d'inertie d'un corps, par rapport à un axe, est égal au moment d'inertie de ce corps, par rapport à un axe parallèle mené par le centre de gravité, plus le produit de la masse du même corps par le carré de la distance entre les deux axes.*

13. Désormais pour obtenir les momens d'inertie de quelques-uns des corps que la géométrie considère, nous supposerons ces corps parfaitement homogènes; et par conséquent les masses seront remplacées par les volumes qui leur sont proportionnels.

14. *Connaissant les trois dimensions* a, b, c *d'un parallélepipède rectangle* p, *trouver le moment d'inertie de ce parallélepipède, par rapport à un axe* A *parallèle au côté* a *de la base supérieure, et passant par le milieu de l'autre côté* b *de cette base.*

Il est clair que si par l'axe A et par le centre du parallélepipède, on fait passer un plan N, ce plan divisera le parallélepipède p en deux autres égaux à p'; de sorte que le moment d'inertie cherché vaut deux fois celui de p'.

Pour trouver ce dernier moment d'inertie, divisons l'arrête $\frac{1}{2}b$ en un nombre infini n de parties égales à u, par des plans perpendiculaires à $\frac{1}{2}b$; nous partagerons ainsi p' en n tranches, ayant chacune a, c et u pour dimensions. Soit t la v ième de ces tranches, à partir de N; si nous divisons l'arrète c en un nombre infini n' de parties égales à u', par des plans perpendiculaires à c, ces plans partageront la v ième tranche t en n' parallélepipèdes égaux, ayant chacun pour volume auu'. Soit p'' le v' ième de ces parallélepipèdes, à partir de la base supérieure; sa distance à cette base sera $v'u'$, et vu sa distance au plan N. Donc le carré de la distance de p'' à l'axe A, sera $v'^2u'^2 + v^2u^2$; et par suite le moment d'inertie de p'', par rapport au même axe, vaudra

$$auu'(v'^2u'^2 + v^2u^2) \text{ ou } auu'^3v'^2 + au'u^3v^2.$$

Prenant successivement $v' = 1, 2, 3, 4, \ldots, n'$, on aura successivement les momens d'inertie des parallélepipèdes qui composent la v ième tranche t; la somme de ces momens sera donc celui de cette tranche, lequel est conséquemment

$$auu'^3S_2 + an'u'u^3v^2.$$

Or, $n'u' = c$ et la variable u' est infiniment petite; on a donc (5) $u'^3S_2 = \frac{1}{3}c^3$, et par suite

$$\frac{1}{3}ac^3u + acu^3v^2.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les momens d'inertie, par rapport à A, de toutes les tranches qui composent le parallélepipède p; la somme de tous ces momens sera donc celui de ce parallélepipède. Ainsi, à cause de $nu = \frac{1}{2}b$ et de u infiniment petite, qui donne $u^3S_2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}b)^3$, il viendra

$$\frac{1}{6}abc^3 + \frac{1}{24}ab^3c \text{ ou } \frac{1}{6}abc(\frac{1}{4}b^2 + c^2) \ldots\ldots (1)$$

Le double de ce résultat étant le moment d'inertie du parallélepipède rectangle p, par rapport à l'axe A, on a, pour ce moment

d'inertie,

$$\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{4}b^2+c^2\right).$$

D'après ce qu'on a vu (12), le moment d'inertie du parallélepipède rectangle p, par rapport à l'axe A', mené par le centre de gravité, parallèlement au premier axe A, est

$$\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{4}b^2+c^2\right)-abc\left(\frac{1}{2}c\right)^2 \text{ ou } abc\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right).$$

La manière dont on a trouvé l'expression (1) fait voir aussi que le moment d'inertie du parallélepipède rectangle p, par rapport au côté a de la base supérieure, a pour valeur

$$abc\left(\frac{b^2+c^2}{3}\right).$$

15. *Soit* C *un corps de révolution par rapport à un axe donné* a, *de manière que si l'on coupe ce corps par des plans perpendiculaires à* a, *les sections soient proportionnelles aux puissances* m *ièmes de leurs distances à une extrémité* P *de* a *: on demande le moment d'inertie de ce corps, par rapport à l'axe* a.

Divisons l'axe a en un nombre infini n de parties égales à u, par des plans perpendiculaires à a; nous partagerons ainsi le corps proposé C en n tranches, toutes de même épaisseur u. Soit t la v ième de ces tranches, à partir de P, et soit r' le rayon de celle de ses bases, la moins voisine de P; cette base b' sera donc à la distance vu du point P.

La v ième tranche t peut être considérée comme un cylindre ayant b' pour base et u pour hauteur. En effet, cette tranche ne diffère du cylindre que d'une quantité moindre que

$$\frac{bu^{m+1}}{a^m}\left[v^m-(v-1)^m\right],$$

b étant la base du corps proposé C : et par conséquent, la somme de toutes les tranches, considérées comme des cylindres, ne diffère du corps C, que d'une quantité qui s'anéantit dans le résultat final (5).

Cela posé, divisons le rayon r' en un nombre infini n' de parties égales à u'; les distances $v'u'$ et $(v'+1)u'$ de deux points de divisions au centre de b', c'est-à-dire à l'axe a, seront les rayons des bases de deux cylindres de même hauteur u, et dont la différence

des volumes est $\pi u(2v'+1)u'^2$. Cette différence est aussi le volume d'un *anneau cylindrique* dont les molécules sont à la distance $v'u'$ de l'axe a. Par conséquent, le moment d'inertie de cet anneau cylindrique, par rapport à l'axe a, sera

$$\pi uu'^4(2v'^3+v'^2);$$

ou bien, en négligeant le terme $\pi uu'^4v'^2$, qui, à cause de $u'n'=r'$ et de la variable u' infiniment petite, doit s'anéantir dans le résultat final (5), ce moment d'inertie sera

$$2\pi uu'^4v'^3.$$

Faisant successivement $v'=1, 2, 3, 4, \ldots, n'$ et ajoutant, la somme sera le moment d'inertie de la v ième tranche t, par rapport à l'axe a; ainsi, à cause de $u'n'=r'$ et de la quantité u' infiniment petite, qui donne $u'^4S_3=\frac{1}{4}r'^4$, on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi ur'^4.$$

Mais par la nature du corps proposé C, en désignant par r le rayon de la base b, on aura

$$\pi r^2 : \pi r'^2 :: a^m : u^mv^m, \text{ d'où } r'^2=\frac{r^2}{a^m}u^mv^m.$$

Ainsi le moment d'inertie de la v ième tranche t, se réduit à

$$\frac{\pi r^4}{2a^{2m}}u^{2m+1}v^{2m}.$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots$, et ajoutant, la somme sera le moment d'inertie ω du corps C, par rapport à l'axe a; donc à cause de $un=r$ et de la variable u infiniment petite, on aura (5)

$$\omega=\frac{\pi ar^4}{4m+2}.$$

Pour le cylindre droit dont a est l'axe, on a $m=0$ et $\omega=\frac{1}{2}\pi ar^4$. Pour le cône droit, $m=2$ et $\omega=\frac{1}{10}\pi ar^4$. Pour le paraboloïde autour de l'axe des abcisses, $m=1$ et $\omega=\frac{1}{6}\pi ar^4$. Pour le paraboloïde autour de l'axe des ordonnées, $m=4$ et $\omega=\frac{1}{18}\pi ar^4$.

16. *Un corps* C *de révolution* (*fig.* 35), *est tel que si l'on divise son axe* SK$=h$, *en un nombre infini* n *de parties égales à* u, *par des plans perpendiculaires à cet axe, les carrés des rayons des cercles résul-*

tantes croîtront comme les puissances m *ièmes de leurs distances au sommet* S. *On demande le moment d'inertie de ce corps, par rapport à un axe* A, *perpendiculaire au sien* h, *par le sommet* S.

Les plans divisent le corps C en n tranches de même épaisseur u. Soit t la v ième de ces tranches, à partir du sommet S; soit r' le rayon OD de la base DIM, laquelle est éloignée de S de la distance SO $= vu$. Le plan SAR mené par les axes A et h, rencontre suivant les droites DM et AR, le cercle précédent et celui qui sert de base au corps proposé. Au centre K de ce dernier, plaçons l'angle droit AKC; du centre K et d'un rayon 1, égal à celui des tables, décrivons le quadrans A'C', dont la mesure sera conséquemment $\frac{1}{2}\pi$, π désignant 3,1415926 etc. Divisons ce quadrans en un nombre infini n' de parties égales à u'; soit B' le v' ième point de division, à partir de A'; de sorte que l'arc A'B' $= u'v'$. Par l'axe OK et par chaque point de division du quadrans A'C', si l'on fait passer des plans, ces plans diviseront le quadrans DI en n' parties égales, et E sera le v' ième point de division, à partir de D. Par chacun des points de division de DI, menons des plans parallèles à SAR; nous partagerons la v ième demi-tranche $\frac{1}{2}t$ en n' portions, dont chacune pourra être regardée comme un parallélepipède rectangle, puisque les parties u et u' sont infiniment petites. Or, le v ième de ces parallélepidèdes, à partir de DM, a pour hauteur u et pour base un rectangle dont la base est EF et la hauteur qx : donc le volume de ce v' ième parallélepipède, est $u \times qx \times$ EF.

Cela posé, comme l'angle $OEx =$ DOE $=$ AKB $= v'u'$, les triangles rectangles OEx et OGq fournissent $Ox = r' \sin. u'v'$ et $Oq = r' \sin. u'(v'-1)$. Et puisque la variable u' est infiniment petite, on a $\sin. u' = u'$ et $\cos. u' = 1$; ainsi $qx = r'u' \cos. u'v'$: d'ailleurs, $EF = 2Ex = 2r' \cos. u'v'$: donc le volume du v' ième parallélepipède devient $2r'^2 uu' \cos.^2 u'v'$.

Le carré de sa distance à l'axe A, est $\overline{OS}^2 + \overline{Ox}^2$, ou $u^2v^2 + r'^2 \sin.^2 u'v'$: donc le moment d'inertie de la v' ième portion de $\frac{1}{2}t$, se réduit à

$$2r'^2u^3v^2u' \cos.^2 u'v' + \tfrac{1}{2}r'^4uu' \sin.^2 2u'v'.$$

Prenant successivement $v' = 1, 2, 3, 4, \ldots, n'$ et ajoutant, la somme sera le moment d'inertie t' de la v ième demi-tranche, par rapport à l'axe A. Donc, en désignant par S $(\cos.^2 n'u')$ la somme des

carrés des des angles u', $2u'$, $3u'$, $4u'$, ..., $n'u'$, et de même par S. (sin.$^2 2n'u'$) la somme des carrés des sinus des angles $2u'$, $4u'$, $6u'$, $8u'$, ..., $2n'u'$, on aura

$$t' = 2r'^2 u^3 v^2 u' \, \mathrm{S}(\cos.^2 n'u') + \tfrac{1}{2} r'^4 uu' \, \mathrm{S}(\sin.^2 2n'u').$$

Or, il est connu (voyez d'ailleurs les mélanges de Mathématiques, pag. 192) que

$$\mathrm{S}(\cos.^2 n'u') = \tfrac{1}{2}(n'-1) + \frac{\sin.(n'+1)\,u' \cos.\, n'u'}{2 \sin.\, u'}$$

$$\mathrm{S}(\sin.^2 2n'u') = \tfrac{1}{2}(n'+1) - \frac{\sin.(n'+1)\,2u' \cos.\, 2n'u'}{2 \sin.\, 2u'}$$

Mais $n'u' = \mathrm{A'C'} = 90°$, donne $\sin. n'u' = 1$, $\cos. n'u' = 0$, $\sin.\ 2n'u' = 0$, $\cos.\ 2n'u' = -1$ et $\sin.\ (2n'u' + 2u') = -\sin.\ 2u' = -2u'$. De plus, nous avons déjà vu que $n'u' = \frac{1}{2}\pi$: ainsi on trouve, à cause de la quantité u' infiniment petite (5),

$$t' = \tfrac{1}{2}\pi r'^2 u^3 v^2 + \tfrac{1}{8}\pi r'^4 u.$$

Le double de ce moment d'inertie est celui de la v ième tranche t. D'après l'énoncé, si l'on désigne par r le rayon KA, on aura

$$h^m : u^m v^m :: r^2 : r'^2 = \frac{r^2}{h^m} u^m v^m :$$

substituant cette valeur, on verra que le moment d'inertie de la v ième tranche t, est

$$\frac{\pi r^2}{h^m} u^{m+3} v^{m+2} + \frac{\pi r^4}{4h^{2m}} u^{2m+1} v^{2m}.$$

Faisant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, et ajoutant, la somme sera le moment d'inertie ω du corps C, par rapport à l'axe A : ce moment d'inertie devient donc finalement (5)

$$\omega = \frac{\pi r^2 h^3}{m+3} + \frac{\pi r^4 h}{4(2m+1)}.$$

Pour le cylindre droit, $m=0$ et $\omega = \frac{1}{3}\pi r^2 h^3 + \frac{1}{4}\pi r^4 h$. Pour le cône droit, $m=2$ et $\omega = \frac{1}{5}\pi r^2 h^3 + \frac{1}{20}\pi r^4 h$. Pour le paraboloïde autour de l'axe des abcisses, $m=1$ et $\omega = \frac{1}{4}\pi r^2 h^3 + \frac{1}{12}\pi r^4 h$. Pour le paraboloïde autour de l'axe des ordonnées, $m=4$ et $\omega = \frac{1}{7}\pi r^2 h^3 + \frac{1}{36}\pi r^4 h$.

17. Raisonnant et opérant comme dans les trois problèmes que

nous venons de résoudre, il sera aisé de démontrer les théorèmes que voici :

I. Soit un corps décrit autour du premier axe 2A d'une ellipse ou d'une hyperbole, par un segment compris entre la courbe, une ordonnée b et la distance a du sommet au pied de cette ordonnée : le moment d'inertie de ce corps, par rapport à l'axe 2A, est

$$\omega = \frac{\pi B^4 a^3}{2A^4}\left(\tfrac{4}{3}A^2 \mp Aa + \tfrac{1}{5}a^2\right),$$

2B désignant le second axe et le signe — n'ayant lieu que pour l'ellipse.

II. Considérons le corps décrit autour du premier axe 2A d'une ellipse ou d'une hyperbole, par le segment compris entre la courbe, l'abcisse a et l'ordonée b, l'origine étant au sommet : je dis que le moment d'inertie de ce corps, par rapport à l'axe des ordonnées, est

$$\omega = \frac{\pi a^4 B^2}{10A^2}(5A \mp 2a) + \frac{\pi a^5 B^4}{60A^4}(20A^2 \mp 15Aa + 3a^2),$$

2B désignant toujours le second axe, et le signe — appartenant à l'ellipse.

Corollaire. Si dans l'ellipse on suppose $a = 2A$ et $A = B = r$, le corps décrit sera la sphère dont r est le rayon; et alors les deux momens d'inertie précédens deviennent respectivement

$$\tfrac{8}{15}\pi r^5 \text{ et } \tfrac{28}{15}\pi r^5.$$

Le premier de ces momens d'inertie est celui de la sphère, par rapport à son diamètre, et le second est le moment d'inertie de la sphère, par rapport à un axe tangent. Et en effet, connaissant l'un de ces deux momens d'inertie, le principe du n.° 12 conduit à l'autre.

III. Les coordonnées étant rectangulaires et m un nombre entier, l'équation de la ligne SM, est $y^m = Kx$ (*fig.* 36). Par les points S, M, P, on élève sur le plan PSM, trois perpendiculaires égales chacune à h; puis on fait glisser parallèlement à lui-même, suivant ces perpendiculaires, l'espace SPM terminé par la ligne SM, l'abcisse $SP = a$ et l'ordonnée $PM = b$; ce qui engendre un corps droit dont le volume est

$$\frac{abhm}{m+1}.$$

Cela posé, les momens d'inertie de ce corps, par rapport à l'axe SP et aux axes en S et en P, perpendiculaires au plan SMP, sont res-

pectivement

$$abh\left[\frac{b^2m}{3(m+3)}+\frac{h^2m}{3(m+1)}\right],$$

$$abh\left[\frac{a^2m}{3m+1}+\frac{b^2m}{3(m+3)}\right],$$

$$abh\left[\frac{2a^2m^3}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}+\frac{b^2m}{3(m+3)}\right].$$

Pour le prisme triangulaire droit et rectangle, $m=1$. Pour le cylindre parabolique, $m=2$. Pour le parallélepipède, il faudrait prendre $m=\infty$.

Le segment SMP a pour aire $\frac{m}{m+1}ab$.

18. *Trouver le centre des pressions exercées par l'eau, contre la vanne d'une écluse.*

Supposons que cette vanne soit un trapèze ABCD, ayant ses deux bases AB $=a$ et DC $=b$ horizontales, et DC désignant d'ailleurs l'intersection de la vanne avec le niveau du liquide (*fig.* 37). Soit K le point où les deux côtés DA et CB vont se rencontrer. Menons par le milieu I de AB, la droite KIH qui passera aussi par le milieu de CD et de toutes ses parallèles. Soient x et h les hauteurs du triangle KAB et du trapèze ABCD : les triangles semblables KDC et KAB donnent $b:a::h+x:x$; d'où $b-a:b::h:h+x=\frac{bh}{b-a}$.

Divisons la hauteur h en un nombre infini n de parties égales à u, de manière que $h=nu$. Par chaque point de division, menons une parallèle à DC; nous partagerons ainsi le trapèze ABCD en n tranches élémentaires, toutes de même hauteur u. Soit MNOP ou t la $v$ième de ces tranches à partir de DC; les distances de MP et NO à DC, seront évidemment vu et $(v-1)u$. Or, les triangles semblables KDC et KMP donnent

$$h+x:h+x-vu::b:\text{MP}=b-\frac{bvu}{h+x}=b-\frac{(b-a)u}{h}v.$$

De même on aura NO $=b-\frac{(b-a)u}{h}(v-1)$.

La $v$ième tranche t peut être considérée comme un parallélogramme MP $\times u$; car elle ne diffère de ce parallélogramme que d'une quan-

tité moindre que ON $\times u$ — MP $\times u$ ou $\frac{b-a}{h} u^2$, laquelle s'anéantit dans le résultat final (5). Considérons donc la $v$ième tranche comme égale à MP $\times u$; son aire aura pour expression

$$bu - \frac{(b-a)}{h} u^2 v \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Le centre de gravité de cette v ième tranche, étant nécessairement dans son intérieur, sa distance à DC est $vu - < u$; donc le moment de la $v$ième tranche, par rapport à DC, est, en négligeant les termes où l'exposant de u surpasse de 2 unités celui de v, parce que ces termes donnent des nombres nuls à la fin des calculs (5),

$$bu^2 v - \frac{(b-a)}{h} u^3 v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Comme la v ième tranche t est horizontale, tous ses points sont à la même distance du niveau; ils éprouvent donc des pressions égales et parallèles, dont la résultante est au milieu de t. Menons la verticale QG, rencontrant le niveau en G. La droite IH $= d$ divisant en deux parties égales toutes les tranches, et celles-ci étant horizontales, il est évident que le centre de pression et le centre de gravité sont placés sur d. Soient y et z leurs distances au point H, et y' et z' leurs distances au niveau; soit en outre x' la distance de DC au centre de gravité du trapèze ABCD $=$ T; il est clair que le point Q est à la distance vu de DC, et que, d'après les triangles semblables, on a $d : \text{QH} :: h : uv$, $\text{QH} : \text{QG} :: z : z'$, $d : h :: z : x'$ et $z : y :: z' : y'$

$$\text{d'où QH} = \frac{d}{h} uv,\ \text{QG} = \frac{dz'}{hz} uv,\ x' = \frac{h}{d} z \ \text{ et } y' = \frac{z'}{z} y.$$

Or, la pression totale éprouvée par une surface plane plongée dans un fluide, est égale au poids d'un prisme ou cylindre de ce fluide, ayant pour base la surface pressée et pour hauteur la distance du niveau au centre de gravité de cette surface. Si donc on désigne par p le poids de l'unité de volume de l'eau, la pression éprouvée par la $v$ième tranche t, sera $p \times \text{QG} \times t$; et le moment de cette pression, par rapport au niveau, $p \times \overline{\text{QG}}^2 \times t$, ou

$$\frac{d^2 p z'^2}{h^2 z^2} \left[bu^3 v^2 - \frac{(b-a)}{h} u^4 v^3 \right] \ldots\ldots (3)$$

Le moment de T par rapport à DC est Tx'. D'ailleurs, la pression totale éprouvée par T, étant $pz'T$, son moment par rapport au niveau est $py'z'T$.

Maintenant faisons successivement $v = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutons; l'expression (1) donnera successivement les valeurs de toutes les tranches qui composent le trapèze T, et leur somme sera l'aire de ce trapèze : l'expression (2) fournira les momens des tranches de T, par rapport à DC ; la somme de ces momens sera donc celui Tx' de T : enfin, l'expression (3) donnera les momens, par rapport au niveau, de toutes les pressions que supportent les tranches du trapèze T; la somme de tous ces momens sera par conséquent celui $py'z'$ T de la pression totale. Ainsi, à cause de $h = nu$ et de la variable u infiniment petite, qui donne $u^2v = \frac{1}{2}h^2$, $u^3v^2 = \frac{1}{3}h^3$ et $u^4v^3 = \frac{1}{4}h^4$, on trouvera

$$T = bh - \tfrac{1}{2}(b-a)\,h = \tfrac{1}{2}(a+b)\,h$$
$$Tx' = \tfrac{1}{2}\,bh^2 - \tfrac{1}{3}\,(b-a)\,h^2 = \tfrac{1}{6}\,(2a+b)h^2$$
$$py'z'T = \frac{d^2pz'^2}{h^2z^2}\left[\tfrac{1}{3}\,bh^3 - \tfrac{1}{4}\,(b-a)\,h^3\right] = \frac{dhpz'^2}{12z^2}(3a+b).$$

Substituant dans les deux dernières équations, les valeurs précédentes de y', x' et T, et réduisant, on aura définitivement

$$z = \frac{d(2a+b)}{3(a+b)} \text{ et } y = \frac{d\,(3a+b)}{2\,(2a+b)}.$$

Si la vanne est un rectangle ou un parallélogramme, on aura $b = a$, $z = \frac{1}{2}\,d$ et $y = \frac{2}{3}\,d$. Lorsque la vanne est un triangle, l'une des quantités a et b nulle : si $a = o$, on trouve $z = \frac{1}{3}\,d$ et $y = \frac{1}{2}\,d$; si $b = o$, il vient $z = \frac{2}{3}\,d$ et $y = \frac{3}{4}\,d$.

19. Le principe du n.° 5 pourrait encore servir à résoudre plusieurs problêmes tant sur le choc d'un liquide contre un cylindre ou une sphère, que sur l'écoulement par des orifices très-petits, dans des vases cylindriques, etc. Mais ce qui précède suffit bien pour montrer comment les premières puissances des nombres naturels peuvent suppléer quelquefois au calcul différentiel et intégral, dans la Géométrie et la Mécanique.

MÉCANIQUE.

Suite et fin de l'article de M. A. TIMMERMANS, *Docteur en Sciences et professeur de Mathématiques supérieures au Collège Royal de Gand.* (Corresp. n.° III, pag. 132 et n.° IV, pag. 207).

L'équation (4) [voyez le 3.me cahier] qui nous a servi à démontrer le principe des vitesses virtuelles et à examiner les cas où ces vitesses peuvent devenir finies, peut aussi servir à démontrer fort simplement tous les théorêmes relatifs aux maxima et minima des momens, et au plan invariable : en effet si l'on représente par M la somme des momens par rapports à un axe quelconque, et si l'on fait pour abréger $\Sigma P \cos.\alpha = X$, $\Sigma P \cos.\beta = Y$, $\Sigma P \cos.\gamma = Z$, $\Sigma PX \sin.\alpha = R$, $\Sigma PY \sin.\beta = R'$, $\Sigma PZ \sin.\gamma = R''$, l'équation (4) deviendra

$$M = R \cos.a + R' \cos.b + R'' \cos.c - XA \sin.a - YB \sin.b - ZC \sin.c$$

Pour connaître l'axe du plus grand moment passant par un point fixe x, y, z, différentions cette équation par rapport à a, b et c, en ayant égard aux équations (1) ; on trouvera

$$(R + yZ - zY) \sin.a da + (R' + zX - xZ) \sin.b db$$
$$+ (R'' + xY - yX) \sin.c dc = 0$$

comparant cette équation à la différentielle de

$$\cos.^2 a + \cos.^2 b + \cos.^2 c = 1$$

on trouvera pour l'axe du plus grand moment :

$$\cos.a = \frac{R + yZ - zY}{M}, \cos.b = \frac{R' + zX - xZ}{M}, \cos.c = \frac{R'' + xY - yX}{M}$$

et pour sa valeur

$$M^2 = (R + yZ - zY)^2 + (R' + zX - xZ)^2 + (R'' + xY - yX)^2.$$

L'équation précédente donne la valeur du moment maximum pour un point déterminé; mais pour avoir le point du système pour lequel ce moment maximum devient le minimum, il suffira de différentier l'équation précédente par rapport à x, y et z, et comme ces coordonnées sont indépendantes de toute espèce de relation, il faudra égaler à zéro les coefficiens des différentielles de chacune de ces variables, ce qui donnera

$$(R + yZ - zY)\,Z = (R'' + xY - yX)\,X$$
$$(R + yZ - zY)\,Y = (R' + zX - xZ)\,X$$
$$(R' + zX - xZ)\,Z = (R'' + xY - yX)\,Y$$

dont deux quelconques seront les équations de l'axe du moment minimum maximorum.

Je ne m'étenderai pas davantage sur le développement de cette théorie, parce que les autres propriétés des axes se déduisent de la formule (4) avec la même facilité; mais il me reste encore à faire voir comment cette équation contient implicitement le principe de la conservation des momens et des aires. Tant que les forces du système seront indépendantes les unes des autres, il est clair que les forces P, P′, P″, etc., ne seront pas altérées, et que par conséquent la somme des momens sera invariable; mais si tout-à-coup les différens corps du système venaient à se lier entre eux, ou à réagir les uns sur les autres par des forces réciproques, chacune des forces P, P′, P″, etc., se décomposerait en deux dont l'une serait la force détruite et l'autre la force subsistante : mais d'après le principe de *D'Alembert*, (si l'on peut donner ce nom à une propriété évidente résultant de sa définition même, et qui ne revêt la forme de principe que par l'expression qu'on lui donne), les forces perdues devront se faire équilibre et donneront lieu par conséquent aux six équations d'équilibre; or, en vertu de cette décomposition, les six facteurs du second membre de (4), se décomposent chacun en deux dont l'un sera relatif aux forces perdues, et l'autre aux forces restantes; et comme, d'après ce qu'on vient de voir, ces premiers termes se détruisent d'eux-mêmes, les derniers conserveront la même valeur après et avant le choc, et parconséquent la somme des momens est invariable; cette invariabilité suppose que les forces qui agis-

sent sur les corps du système, sont des forces constantes et non des forces accélératrices : mais si deux ou plusieurs des corps réagissaient les uns sur les autres en vertu des forces d'attraction ou de répulsion, ces forces disparaîtraient entièrement de l'équation (4), pourvu que la réaction fut égale et contraire à l'action, ce qui comprend tous les cas de la nature; en sorte que le moment total ne serait pas altéré par ces forces variables. Cette invariabilité des momens entraîne nécessairement celle des aires; car si dans (4) on remplace chaque force P par MV, V*dt* sera l'espace parcouru par le corps pendant le temps *dt*, HV*dt* sera le double de l'aire décrite par le rayon vecteur H de M, VH sin. V *dt* sera cette aire décomposée perpendiculairement à l'axe; or, on vient de voir que ΣPH sin. V est invariable; $\frac{\Sigma m \mathrm{VH\,sin.\,V}dt}{dt}$ doit donc l'être également : c'est en cela que consiste le principe de *D'Arcy ;* car ces aires ne sont autre chose que les projections des aires décrites par les rayons vecteurs des corps sur un plan perpendiculaire à l'axe autour du point d'intersection de l'axe et du plan pris pour foyer.

Nous aurions pu déduire aussi de l'équation (4) combinée avec le principe des vitesses virtuelles, le principe de la conservation des forces vives ordinaires et des forces vives aréolaires de M. *Binet*, inspecteur des études à l'Ecole Polytechnique ; mais les bornes que nous prescrit la nature de ce recueil, ne nous permettent pas d'entrer ici dans ces détails.

Sur les Caustiques, par M. A. Timmermans, *professeur de Mathématiques au Collège Royal de Gand.*

Dans le troisième cahier de la Correspondance, M. *Quetelet* a fait connaître sans démonstration deux nouveaux théorèmes sur les Caustiques par réflexion et par réfraction, que l'on peut démontrer fort simplement ainsi qu'il suit : mais pour ne pas trop alonger cet article, nous considérerons seulement le cas de la réflexion et de la ré-

fraction par des courbes, parce qu'il sera facile d'étendre les mêmes considérations aux surfaces (*).

Soient (*fig.* 38) deux courbes quelconques AB et CD; *la courbe des lieux géométriques des centres des cercles tangens à ces deux courbes, est une courbe réfléchissante dont les deux courbes données sont des caustiques secondaires* (**); en effet, considérons un cercle EOF variable de rayon, se mouvant avec une certaine vitesse entre les deux courbes AB et DC, et supposons que le cercle étant arrivé à la position EOF, on substitue aux deux courbes les deux tangentes EP et FP : le cercle en vertu de sa vitesse acquise, continuera à se mouvoir entre ces deux tangentes, et son centre décrira la droite OP; OP représente donc la direction de la vitesse du centre, lorsque le cercle est arrivé en O; et par conséquent OP est une tangente à la courbe décrite par ce centre; d'où l'on conclut que l'angle QOS est égal à l'angle ROS, SO étant une normale à la courbe MN, ou une perpendiculaire à la tangente OP; or, OQ étant un rayon incident, OR sera le même rayon réfléchi.

Pour le cas de la réfraction dont ce qui précède se déduit comme une particularité, considérons (*fig.* 39) deux courbes quelconques AB et CD, et concevons que deux cercles concentriques OF et OE, variables de rayon, mais conservant toujours entre eux le même rapport, se meuvent entre ces deux courbes; de manière que chacun des cercles reste tangent à l'une des courbes : la courbe décrite par le centre commun, sera une courbe dirimante dont les deux courbes données seront des caustiques secondaires; ce qui se démontre en remarquant, comme on l'a fait plus haut, que PO est une tangente à la courbe MON, et que par conséquent, OS étant normal à MN, on a

$$\frac{EO}{FO}=\text{const.}=\frac{\sin.\ EPO}{\sin.\ FPO}=\frac{\sin.\ ROS}{\sin.\ QOS};$$

Si les deux cercles deviennent égaux, alors ROS = QOS et l'on rentre dans le cas de la réflexion.

(*) Nous observerons que M. *Timmermans* nous avait communiqué sa démonstration antérieurement à la publication du 5.e cahier des Ann. Math., où on trouve celle de M. *Gergonne* pour le cas de la réflexion. LES EDITEURS.

(**) Nous nommons avec M. *Quetelet*, *caustiques secondaires* les trajectoires orthogonales des rayons incidens ou réfléchis.

PHYSIQUE.

Note sur la polarisation de la lumière réfléchie par l'air serein (*) [*extrait d'une lettre de M.* Delezenne, *professeur de Physique, à Lille, à M.* Quetelet].

Soient S un point radieux pris en-dedans ou en-dehors de l'atmosphère; A une molécule d'air située de manière qu'elle polarise le rayon qu'elle reçoit de S, et O l'œil de l'observateur, qui reçoit le rayon réfléchi *polarisé*. Si on appelle i l'angle d'incidence compté de la normale, $2i$ sera l'angle A formé par le rayon incident et le rayon réfléchi. Maintenant, si sur OS comme corde, on décrit un arc de cercle capable de l'angle $2i$, et si on fait tourner cet arc autour de OS, il engendrera une surface dont l'intersection avec l'atmosphère sera le

---

(*) M. *Delezenne* m'a communiqué l'article précédent comme une démonstration du principe que j'ai énoncé dans le 5.e cahier de la Corresp. Math. Ce physicien me fait observer dans sa lettre que le phénomène dont il est question, se trouve mentionné dans le grand Traité de physique de *Biot*, tom. 4, p. 338, mais dans une note qu'il avait perdue de vue comme moi, quand je lui communiquai la loi à laquelle le phénomène est assujetti, loi qui d'ailleurs ne se trouve pas énoncée dans ce passage que voici : « Si le ciel n'était pas couvert de nuages blancs, la lame (il s'agit d'une lame mince de chaux sulfatée), dirigée vers certains points de l'horizon, pourrait offrir une coloration sensible à la vue simple, parce que la *lumière réfléchie par l'atmosphère, est en partie polarisée lorsque le temps est serein*, et qu'ici la lumière polarisée produit d'autres effets que la lumière directe. » Je pense du reste, comme je l'ai déjà dit dans le premier article, que le phénomène est trop frappant pour ne pas avoir été observé par les physiciens qui se sont occupés de la polarisation; mais mes doutes portent sur l'observation de la *loi* à laquelle le phénomène est assujetti, et que j'énonçais.

A. Q.

lieu de toutes les molécules d'air qui jouiront, comme A, de la propriété d'envoyer en O des rayons polarisés. Cela posé; selon une remarque faite par M. *Brouwster*, quand la lumière tombe sur une substance réfringente, le rayon réfléchi polarisé est perpendiculaire sur le rayon réfracté; donc l'angle $2i$, calculé d'après le rapport de 3201 à 3200 du sinus d'incidence au sinus de réfraction dans les couches inférieures de l'air, vaudra $90^\circ - 1' - 4''\ 1/2$. Il se rapprochera davantage de 90° dans les couches supérieures où la densité est moindre.

Lorsque, dans le triangle OAS, le côté OA pourra être considéré comme infiniment petit relativement à OS, ce qui arriverait si le corps radieux S était le soleil ou la lune, l'angle O vaudra $89^\circ - 58' - 55''\ 1/2$ et il se rapprochera de 90° pour les couches supérieures. Il suit de là que le phénomène aura, à très-peu-près, son maximum d'intensité dans tout le plan perpendiculaire à la ligne OS menée de l'œil à l'astre. A des distances angulaires de l'astre, plus grandes et plus petites que 90°, le phénomène s'observera encore; mais avec une intensité décroissante, parce que les molécules d'air polarisent encore partiellement la lumière, quand elles sont situées de manière que l'angle $2i$ est un peu plus et un peu moins grand que 90°. Cela s'observe, par exemple, sur le verre. Pour cette substance, l'effet est au maximum, quand $i = 54^\circ - 35'$; mais il est encore sensible quand $i = 54^\circ \pm 20^\circ$. Il serait facile de déterminer, à-peu-près, les limites de l'angle $2i$ pour l'air, en observant directement celles de l'angle O. Il est très-probable que les réfractions atmosphériques étendent ces limites.

Extrait d'une lettre de M. Van Mons *à M.* Brandes, *sur la cause des rosées* (*).

Je me suis assuré que la rosée blanche, se formant à 4° sous zéro, est de la vraie rosée, se déposant sur les non-conducteurs ou les

(*) Nous avions promis dans la livraison précédente, un article de M. *Ampère* sur l'électro-dynamique; mais comme il a paru depuis dans les annales de

mauvais conducteurs de l'électricité; en grande abondance sur le verre, les gateaux de résine, le bois peint et poli et sur toutes les faces de ces corps; pas du tout sur les métaux, et peu sur la fayence; il en est de même de la rosée blanche liquide : elle a ses choix de corps, comme la rosée blanche concrète. La rosée d'été a non-seulement ses prédilections pour certains corps morts, mais encore pour certaines plantes en croissance; car tel soir elle se dépose sur de telles espèces, et l'autre soir sur d'autres espèces, et cela parmi des espèces croissant pêle-mêle; le gazon est toujours mouillé, l'eau de cette rosée peut bien provenir des plantes elles-mêmes. Lorsque les métaux et autres conducteurs électriques s'humectent, c'est plutôt par un brouillard que par de la vraie rosée. Ce dernier météore ne provient pas d'un refroidissement à la suite de la chaleur s'échappant par rayonnement, mais de la raréfaction de l'air en vertu d'une aspiration sidérale, laquelle excite le froid qui accompagne toujours la chute de la rosée, non comme cause, mais comme effet, et donne lieu à une déposition d'eau. Par la dilatation mécanique, les corps gazeux augmentent de capacité pour contenir la chaleur d'*interposition*, qu'on pourrait nommer d'*expansion*. Ce calorique ne se trouve pas dans les liquides, ou ne peut, en raison de leur incompressibilité, en être exprimé; c'est peut-être à défaut de ce calorique, que les liquides ne sont pas compressibles. La vapeur d'eau, que l'on dilate par des moyens mécaniques, la température étant maintenue au degré de l'ébullition, ne se refroidit précisément pas; mais une quantité de vapeur suffisante pour réparer la perte de calorique, se condense en eau. Ce calorique existe latent dans les corps aëriformes, quoique ce ne soit pas le calorique de forme ou de l'état gazeux de ces corps. La raréfaction de l'air par aspiration, laquelle a lieu pendant la nuit lorsque le temps est serein, produit le même effet sur l'eau vaporisée dans l'air. Le froid est excité par la dilatation de l'air dont aucune portion ne peut se condenser pour réparer la perte en calorique que dans son expansion il éprouve, et ce froid serait bien plus intense si la vapeur d'eau, en se conden-

---

chimie, son savant auteur a bien voulu nous promettre de le remplacer, en nous communiquant les résultats de ses nouvelles recherches.

LES ÉDITEURS.

sant en rosée ne la reparaît en partie par la chaleur qu'elle dépose. Le refroidissement, par la dilatation, n'est toutefois pas suffisant pour faire précipiter entièrement l'eau de l'air, et il semble qu'un corps recevant l'électricité dans sa masse plutôt que de la conduire à sa surface, doit, en soustrayant à la vapeur une sorte d'électricité, achever la condensation de ce liquide. Cette raréfaction de l'air, aux temps des rosées, est rendue manifeste par une chute considérable de la boule du manomètre ou balance aérostatique à vessie.

Pendant que les raréfactions de l'air par aspiration ont lieu, le baromètre ne fait presque pas de mouvement, parce que la colonne d'air ne fait que s'alonger, et ne perd ni en matière ni en ressort ou ne diminue pas en force de pression : sa densité seulement éprouve une perte considérable, à en juger d'après le manomètre qui, aux temps des rosées, parcourt toute son échelle dans le sens de cette perte (*).

(*) On pourra consulter sur le même sujet les articles insérés dans les premiers cahiers de ce journal, où la formation de la rosée est attribuée au rayonnement de la chaleur. Sans prononcer entre cette théorie et celle qu'expose M. *Van Mons*, nous avons peine à nous ranger de l'avis de ce savant, sur ce qu'il nomme *aspiration sidérale*.

A. Q.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Notice historique sur Gemma Frisius (*).

Bien peu de Géomètres aujourd'hui connaissent les travaux de *Gemma Frisius* : il n'en existe peut-être pas deux qui aient lu tous ses écrits; cependant on connaît assez généralement les services importans qu'il a rendus aux sciences. Tel est le propre des hommes véritablement doués de génie; leurs écrits peuvent tomber dans l'oubli, parcequ'ils se trouvent remplacés par d'autres plus complets ou présentés avec plus d'ordre et de clarté; mais leurs découvertes se transmettent d'âge en âge, et deviennent impérissables comme les lois de la nature qu'elles nous révèlent.

Gemma Frisius naquit à *Dockum* en Frise, en 1508, et, comme on croit, le 8 décembre. Son nom a donné lieu à différentes allusions; le célèbre *Jean Second* nous en offre un exemple dans les vers suivans :

Immortale feres nomen, dum *Gemma* feretur
In digitis, fulvoque decens radiabit in auro.

Ces mêmes allusions ont sans doute aussi produit la méprise de quelques auteurs qui l'ont nommé *Reinier Edelgestein,* en traduisant son

(*) Les principaux auteurs qui ont écrit sur *Gemma Frisius,* sont *Suffridus Petri, Miræus, Melchior Adamus, Valerius Andreas, Paquot, Dethou, Lalande, Ekama,* etc. Nous avons pris nos principaux renseignemens dans ces auteurs et dans les ouvrages mêmes de *Gemma,* dont plusieurs nous ont été obligeamment communiqués par M. *Van Hulthem.*

nom du latin. *Gemma* perdit de bonne heure ses parens et, par suite des événemens politiques, fut envoyé à Groningue où il fit ses premières études. Delà il passa à Louvain, et entra au Collége de Groningue; il s'y occupa surtout des sciences mathématiques et de la médecine; mais on ignore quels furent ses premiers maîtres. Il commença à se faire quelque réputation, en donnant chez lui des leçons qui furent très-fréquentées : *Suffridus Petri* qui les suivit, nous apprend qu'il y fesait preuve d'un profond savoir et d'une adresse toute particulière. Il avait à peine 21 ans, lorsqu'il publia ses corrections de la *Cosmographie d'Apien* (*); un an après, il donna trois opuscules sur l'Astronomie et la Cosmographie, qui portaient les titres suivants : 1.° *De principiis Astronomiæ et Cosmographiæ* : 2.° *De usu globi* : 3.° *De orbis divisione et insulis,* et en 1533 il fit paraître encore à Anvers un petit écrit sous le titre : *De locorum describendorum ratione et de eorum distantiis inveniendis.* Il y propose pour lever la carte d'un pays, à-peu-près les principes de la méthode de *Snellius,* que l'on suit encore. Il mesura du haut de la tour d'Anvers les angles que forment les rayons visuels menés aux tours de Lierre, Malines, Louvain, Bruxelles; il observa ensuite de Bruxelles les tours de Louvain, Malines, Lierre, Gand, et indiqua d'après cela les moyens de rapporter ces divers points sur la carte et d'étendre plus loin ces mêmes constructions. Son premier ouvrage obtint le plus grand succès, il fut traduit dans plusieurs langues, et en un assez court espace de temps, il en parut un grand nombre d'éditions dans les Pays-Bas et à l'étranger : cet ouvrage ainsi que les autres de *Gemma,* furent ensuite remplacés par les écrits de *Kepler* et des grands Géomètres qui le suivirent. *Lalande,* dans la préface de son Abrégé d'Astronomie, observe que, dans le livre *De orbis divisione,* on trouve 53° de différence en longitude depuis le Caire jusqu'à Tolède, au lieu de 35° qu'il y a réellement : les autres distances y sont étendues à proportion; en 1787, on avait encore 3 à 4 degrés d'incertitude par rapport à l'extrémité de la mer noire et de la mer caspienne. C'est dans l'opuscule *De usu*

(*) *Pierre Apien* était professeur à Ingolstad et y mourut en 1552. Il avait été créé chevalier par *Charles* V qui lui fit en même temps un présent de 3000 écus d'or. Il laissa un fils, *Philippe Apien*, également habile mathématicien, de qui l'on a un traité sur les *ombres* ou *cadrans solaires.*

globi composé pour l'explication d'un globe qu'il avait construit, qu'on trouve pour la première fois l'idée de déterminer les longitudes par le moyen des montres, idée qui a été depuis de la plus grande utilité, surtout dans la navigation : c'est aussi le plus beau titre de gloire de notre célèbre compatriote (*).

On ne cite pas précisément à quel âge *Gemma* se maria ni le nom de la femme qu'il épousa ; on sait seulement que vers l'âge de 26 ans, il eut un fils, *Cornelius Gemma*, qui fut également habile mathématicien et médecin instruit : il naquit à Louvain le 28 février 1535, et reçut en 1570 le titre de docteur en médecine : la même année il fut nommé professeur par le duc d'*Albe*. *Cornelius Gemma* mourut à l'âge de 44 ans (**) et laissa plusieurs ouvrages sur les sciences, qui

---

(*) Nous citerons ici ses paroles mêmes, elles prouveront que *Gemma* avait parfaitement saisi toutes les ressources de sa méthode. *Nostro seculo horologia quædam parva a fabre constructa videmus prodire, quæ ob quantitatem exiguam proficiscenti minime oneri sunt; hæc motu continuo ad 24 horas sæpe perdurant ; imo si juves, perpetuo quasi motu movebuntur. Horum igitur adjumento hac ratione longitudo invenitur. Primo curandum ut priusquam itineri intendamus, exactissime horas ejus loci observet, a quo proficiscimur; deinde ut inter proficiscendum nunquam cesset. Completo itaque itinere 15 aut 20 miliarium, si quantum longitudine distemus a loco discessus libeat addiscere, expectandum donec index horologii punctum alicujus horæ exactissime pertingat, eodemque momento per astrolabium aut globium nostrum inquirenda est hora ejus loci in quo jam sumus; quæ si ad minutum convenerit cum horis quas horoscopium indicat, certum est nos sub eodem adhuc esse meridiono, aut sub eadem longitudine, iterque nostrum versus meridiem vel aquilonem confecisse. Si vero differat una aut aliquot minutis, tum hæc reducenda sunt ad gradus, vel graduum minuta, ut in præcedenti capite docuimus, et sic longitudo elicienda. Hac arte possem longitudinem regionum invenire, etiamsi per mille milliaria inscius essem adductus, ignota etiam itineris distantia* (de usu globi, pag. 238).

(**) *Maximilien Vrientius*, d'autres disent *Beyerling*, fit alors cette épitaphe qui renouvelle les allusions de *Jean Second* au nom de Gemma :

Quis lapis hic ? *Gemmæ. Gemmam* lapis an tegit ? inquis,
 At condi in *Gemma* debuerat potius.
Non ita ; nam quævis minor illa *Gemma* fuisset,
 Et posito a *Gemma*, *Gemma* fit iste lapis.

prouvent qu'à une vaste érudition il ne joignait pas toujours un raisonnement bien solide. Un de ses ouvrages les plus extraordinaires, est celui qu'il publia à Anvers, en 1575, sous le titre : *De naturæ divinis characterismis,* à l'occasion de l'étoile fameuse qui parut tout-à-coup dans la constellation de *Cassiopée* (*). *Cornelius* plein des idées astronomiques de ce temps, cherchait à prouver qu'il fallait rattacher à l'apparition de ce phénomène l'existence de plusieurs monstruosités qu'il a exposées minutieusement dans son ouvrage. Plus sage dans ses écrits, son père s'abandonnait bien moins aux écarts de son imagination et procédait avec plus de rectitude et de solidité dans le jugement.

C'est en 1540 que parut pour la première fois l'opuscule *De annuli astronomici usu,* à la suite de la nouvelle édition d'*Apien.* Cet écrit est très-remarquable par la description de cet instrument qui fut long-temps en usage et que *Gemma Frisius* avait perfectionné et non pas inventé, comme l'ont cru quelques auteurs. Il imagina l'anneau astronomique, dit *Lalande,* c'est-à-dire, cet instrument composé d'un méridien et d'un équateur avec une allidade, par lequel on trouve l'heure qu'il est dans tout pays. Cependant *Gemma* lui-même dit positivement dans l'ouvrage dont il s'agit : *meum non est omnino inventum illud; attamen si inventis addere, eaque dilatare laudi ducendum sit, in his nomen profiteor meum.* Il n'en est pas de même de ses titres plus importans d'inventeur de la méthode pour déterminer les longitudes en mer, dont on se sert encore aujourd'hui; ils se trouvent établis d'une manière incontestable de l'aveu même des écrivains de tous les pays.

Vers l'âge de 42 ans, *Gemma* reçut le titre de docteur en médecine à l'Université de Louvain et commença à remplir dès cette époque les fonctions de professeur dans la même Université. On ne connaît de

(*) Elle fut découverte le 7 novembre 1572 par *Pencer*, à Wittenberg, et par le sénateur *Hainzelius*, à Augsbourg. *Tycho* qui l'observa avec le plus grand soin, ne l'aperçut que deux jours après. Elle était d'abord presqu'aussi éclatante que Vénus, sa lumière s'affaiblit ensuite successivement, et elle disparut enfin au mois de mars 1574; d'après les observations de ce grand astronome, elle était à 36° 54′ de longitude et à 53° 45′ de latitude; elle n'avait point de parallaxe sensible et sa lumière scintillait comme celle des étoiles fixes. (Voyez *Montucla*, 1.er vol. et l'ouvrage de *Tycho* sur le même phénomène).

lui aucun écrit particulier sur la médecine : cependant *Antonides Lindenius* dit qu'en 1592, *H. Garetius* publia à Francfort un ouvrage qui contenait de lui quelques conseils sur l'arthritide, *Consilia quædam de arthritide*. *Gemma Frisius* passait de son temps pour médecin fort habile et très-instruit; néanmoins c'est surtout dans les sciences mathématiques qu'il s'était rendu célèbre. Il jouissait de beaucoup de considération à la cour de l'empereur charles V, mais il eut le bon esprit d'éviter autant que possible les invitations qu'il recevait de s'y rendre. Habitué à goûter les charmes d'une vie paisible entièrement consacrée à l'étude, et à ne parler jamais que le langage de la vérité, il évitait de se mêler aux courtisans parmi lesquels il se serait senti déplacé. Par cette conduite sage et mesurée, il jouit avec calme d'une réputation justement méritée et ne s'attira point les humiliations auxquelles ne sont que trop exposés les savans qui oublient leurs vrais titres et cherchent à briller par d'autres bien moins solides. Il paraît d'après quelques écrits, qu'il était de l'ordre de la toison d'or. Quoique cette distinction fut très-honorable, puisqu'il ne la devait qu'à son mérite, sa modestie l'aura sans doute empêché de s'en prévaloir. Ses mœurs étaient douces et le fesaient généralement aimer; il avait un ami intime, c'était son collégue *H. Trivelius*. S'il existait entre eux beaucoup de rapprochemens pour le caractère et pour la nature de leurs occupations, il n'en était pas de même pour le physique; car autant *Gemma* était faible, pâle et délicat, autant son ami était fort, corpulent et brillant de santé : ce qui fesait dire d'eux : *Lovaniensium medicorum par impar*. *Suffridus Petri* rapporte que *Trivelius* ayant été frappé de la peste, eut recours aux connaissances de son ami, mais que celui-ci voyant le mal sans remède, engagea le malade à attendre courageusement la mort, ajoutant que lui-même le suivrait bientôt : il assure même que les deux amis moururent en effet tous deux en 1558 à des époques très-rapprochées. Cette dernière assertion est entièrement démentie par tous les autres écrivains qui disent positivement que *Gemma* mourut le 25 mai 1555, dans la 47.e année de son âge, après avoir long-temps souffert de la pierre. *Melchior Adamus* prétend qu'il fut enterré dans l'église des Dominicains, mais sans faire mention d'aucune épitaphe.

Outre les ouvrages dont nous avons parlé plus haut, *Gemma* pro-

duisit encore une Arithmétique pratique (*) qui fut très-estimée de son temps et qui a été mentionnée très-honorablement par *C. Wolf*, pour l'utilité qu'il en a tirée dans ses premières études. En 1540 parut encore une description de l'univers, formée d'après les écrits des anciens et des modernes (**). *Suffridus* rapporte que *Charles V* ayant indiqué une erreur à *Gemma*, celui-ci s'empressa de la rectifier et dédia l'édition corrigée à l'Empereur. Enfin ce savant laborieux publia encore en 1545, sous le titre : *De radio astronomico et geometrico*, différens problêmes sur la Géographie, l'Optique, la Géométrie et l'Astronomie, qui sont résolus au moyen du rayon astronomique. Pour donner une idée des avantages de cet instrument, il s'applique ce vers de Virgile

Descripsit radio totum qui gentibus orbem.

Cet opuscule contient aussi quelques observations astronomiques intéressantes, surtout pour la détermination des éclipses ; on y reconnaît la sagacité de *Gemma*. Notre savant ne doit être considéré du reste que comme ayant perfectionné le rayon astronomique ou arbalestrille, instrument qui a servi jusque dans ces derniers temps, ainsi que l'astrolabe également perfectionné par le même savant (***). Ce ne fut qu'après la mort de *Gemma* que son fils fit paraître en 1556 à Anvers, l'ouvrage sur l'astrolabe (****) qui même n'était point entièrement achevé, mais auquel il mit la dernière main.

On doit ajouter aux instrumens perfectionnés par *Gemma*, le quarré nautique, *quadratum nauticum* dont il a donné une description dans l'appendice à l'ouvrage d'*Apien*. On trouve aussi dans les écrits de cet astronome un assez grand nombre d'observations faites à Louvain : si elles n'ont point l'exactitude que permet la précision des instrumens modernes, elles prouvent du moins d'après la manière dont elles ont été

(*) Arithmeticæ practicæ methodus 1540, in-8.°

(**) Charta sive mappa, Lovanii, 1540.

(***) Voici ce qu'il dit à cet égard dans sa préface : *quid vero hac in re præstiterit nostrum et ingenium et labor, aliorum esto judicium. Attigerunt quidem alii ante nos aliquem hujus radii usum : verum (ut pace illorum dixerim) multa reliquerunt et utilissima et pulcherrima artis problemata.*

(****) De Astrolabio catholico liber. Ant. 1556.

faites, les ressources que *Gemma* trouvait en lui-même et les précautions qu'il prenait pour atténuer les erreurs.

On peut voir sur la carte que *Dominique Cassini* a donnée des différentes inégalités de la lune, que le nom de *Gemma Frisius* a été attaché à une aspérité qui se trouve dans le voisinage de la tache de *Tycho*, entre celles de *Nonius*, de *Riccius* et de *Waltherus*. Nous renouvellons ici le vœu déjà émis dans la notice sur *Grégoire de S.t-Vincent*, que le buste de *Gemma* figure dans l'enceinte d'une Universisé dont il a été un des plus beaux ornemens (*).

A. Q.

F. J. Goebel *oratio de efficacissimis quibus adolescentum animi ad Geometriæ descriptivæ studium adliciuntur incitamentis. Lovanii*, 1825.

Le sujet de la dissertation de M. *Goebel*, est du plus haut intérêt : la géométrie descriptive, en effet, est devenue entre les mains du célèbre *Monge*, une des branches les plus brillantes des mathématiques, tant par ses applications nombreuses dans les arts, que par la carrière immense qu'elle ouvre à l'imagination, en lui offrant des méthodes simples et générales pour la solution d'une foule de problêmes. En la considérant d'un point de vue un peu élevé, comme l'a fait ce grand géomètre dans les prolégomènes de son ouvrage, elle se présente de la manière la plus séduisante, et offre un des plus forts argumens contre la prétendue aridité des sciences mathématiques.

(*) Dans son ouvrage in-4.°, de 966 pages, ayant pour titre : *Bibliographie astronomique*, avec l'histoire de l'Astronomie, depuis 1781 jusqu'à 1802, le célèbre *Lalande* fait de *Gemma* (*Reinerus*) et de *Gemma* (*Frisius*), deux personnages différens (pag. 893), tandis qu'ils ne sont qu'une seule et même personne.

J. G. G.

M. *Goebel*, dans le discours qu'il a prononcé comme Recteur, à l'occasion de la distribution des prix à l'Université de Louvain, s'est proposé *de rechercher les moyens les plus propres pour exciter les jeunes gens à l'étude de la Géométrie descriptive*. Il commence par donner de cette science une définition à sa manière; il apprend ensuite ce qu'il faut entendre par *projections*, et comment on détermine la position d'un point dans l'espace. M. *Goebel* regarde l'étude de la Géométrie descriptive comme se composant essentiellement de deux parties dont il nomme la première *rationnelle* ou *scientifique*, et l'autre *artificielle* : pour mieux faire comprendre sa distinction, il démontre d'une manière un peu longue, à défaut de figure, comment on trouve la plus courte distance de deux droites données par leurs projections. Si nous comprenons bien l'auteur, il nomme les procédés purement graphiques, la partie artificielle, en réservant la dénomination de scientifique pour ce qui concerne le raisonnement. De la considération du point, de la ligne droite et du plan, M. *Goebel* passe à une autre branche beaucoup plus étendue, à cause, dit-il, de la multitude de lignes courbes de toute espèce qu'on y trouve. *Quam ingens propter multitudinem curvarum cujusvis generis immensam, hic est campus!* Il s'excuse près de ses auditeurs de ne pouvoir leur faire connaître, à cause des limites étroites de son discours, les différens modes de projeter les courbes : l'auteur veut sans doute parler des différentes méthodes pour construire les lignes d'intersection des surfaces. Il dit ensuite ce qu'il faut entendre par *surfaces de révolution, surfaces enveloppantes et enveloppées, surfaces développables*, etc. : il examine les surfaces que M. *Hachette* a nommées *réglées*, et après avoir fait l'énumération des surfaces du second degré, il dit quelques mots de la construction des lignes selon lesquelles les corps se pénètrent, et finit par faire ressortir l'avantage que l'on a de réduire toute la théorie de la perspective et des ombres à un problème de Géométrie descriptive. Telle est la marche que M. *Goebel* a suivie; nous n'entrerons dans aucuns détails sur le reste de son discours, entièrement consacré à la solemnité qui avait pour but la distribution des prix et la remise des faisceaux académiques entre les mains du nouveau Recteur.

A. Q.

La Société des Sciences de Harlem, vient de faire paraître son programme pour 1825. Parmi les questions nombreuses qui sont mises au concours pour le 1.er janvier 1827, nous avons remarqué celles-ci qui peuvent intéresser plus particulièrement nos lecteurs.

Comme on a reconnu que le feu et la flamme par un courant de vapeur d'eau, dirigé d'une certaine manière, prennent un accroissement de force notable, on demande : *comment et dans quelles circonstances on peut tirer parti de ces observations pour augmenter l'intensité du feu, soit pour les besoins de la société, soit pour ceux des fabriques.*

La vapeur n'étant pas employée seulement comme force motrice dans les machines à feu, mais encore à differens autres usages, comme, par exemple, dans les blanchisseries de fil, dans les serres, et même dans les besoins domestiques; la Société demande, *pour quelles fabriques ou bien pour quels autres usages domestiques, on peut établir d'après des preuves certaines, que la vapeur peut être employée avantageusement.*

Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles.

M. *Dewez*, sécrétaire perpétuel, a donné lecture d'une lettre de M. *Moreau de Jonnès*, correspondant de l'Académie et de l'Institut de France, laquelle a rapport à différens sujets scientifiques et particulièrement aux progrès alarmans de la maladie connue sous le nom de varioloïde. — MM. *Garnier* et *Quetelet* font un rapport sur le mémoire de M. *Lobatto*, présenté à la séance précédente, concernant *des recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques.* MM. les commissaires concluent à ce que l'Académie accorde son approbation au travail de M. *Lobatto*. Le rapport est adopté. — M. *Quetelet* a ensuite donné lecture d'un mémoire de sa composition, ayant pour titre : *Résumé d'une nouvelle Théorie des Caustiques, suivie de différentes applications de la théorie des projections stéréographiques :*

la dernière partie du mémoire a surtout pour but de donner une nouvelle extension à un travail sur les projections stéréographiques, présenté par M. *Dandelin* à l'une des séances précédentes. Ces deux mémoires sont destinés à paraître dans le 4.e volume de l'Académie.

— M. *Guillery*, professeur de chimie à Charleroi et l'un de nos correspondans, se propose de faire paraître par souscription un ouvrage de la plus haute importance, sous le titre de *Répertoire de Chimie, ou Tableau des actions et combinaisons chimiques.* L'auteur qui est un ancien élève de l'École Normale et qui a été formé par les célèbres chimistes *Gay-Lussac*, *Dulong*, *Thénard*, etc., se propose de représenter tout ce qui a été fait en chimie jusqu'à ce jour, en indiquant les nombreux sujets sur lesquels on peut espérer de faire des observations nouvelles et des découvertes. L'ouvrage formera un grand volume plano et paraîtra par livraisons de douze tableaux au moins: le prix de chaque livraison sera de 1 florin 50 cents pour les souscripteurs, et de 2 florins pour les non souscripteurs. Il y aura 16 à 20 livraisons. Nous reviendrons sur cette vaste entreprise, quand la première livraison aura paru.

— Nous signalerons également à l'attention de nos lecteurs le grand atlas que M. *Vandermalen* publie en ce moment à Bruxelles. Cet immense travail doit se composer de 400 cartes in-folio : déjà plusieurs livraisons ont paru et ont mérité les suffrages des connaisseurs. M. *Vandermalen* par son zèle infatigable et par ses connaissances variées, répandra sans doute un nouvel éclat sur la patrie des *Hondius*, des *Ortélius* et des *Mercator*.

A. Q.

M. *Scheer de Lionastre*, lieutenant-colonel d'artillerie, attaché à l'Ecole militaire de l'artillerie et du génie à Delft (*), nous a adressé pour être inséré dans la Correspondance, le sommaire d'un ouvrage actuellement sous presse ; ayant pour titre : *Théorie Balistique où l'on détermine par une méthode neuve, la vitesse initiale des projectiles*

(*) L'Ecole militaire de Delft, est établie pour l'instruction de l'artillerie, du génie, du bataillon des pontonniers, mineurs et sapeurs, des ingénieurs géographes, et du waterstaat (corps des ponts et chaussées et des mines) : les élèves qui se

de forme sphérique, de tout calibre, en tenant compte de la résistance de l'air, et où de cette vitesse connue et supposée constante pour un même calibre, on déduit toutes les circonstances du mouvement de ces projectiles. Les résultats du calcul rapprochés de ceux des expériences, offrent un accord aussi satisfaisant qu'on peut le désirer entre la théorie et la pratique. Nous transcrirons ici le préambule du sommaire qui trouvera place dans la prochaine livraison. « Son Altesse royale » le prince *Frédéric des Pays-Bas,* grand-maître de l'artillerie, ayant » ordonné sur la proposition de son excellence le lieutenant-général » *Voet,* commandant et directeur de l'Ecole d'artillerie et du génie, » une série d'expériences à faire (en 1823 et 1824) à l'effet de déter- » miner un nombre suffisant d'ordonnées, nécessaire pour décrire la » trajectoire pour le tir de but en blanc des pièces de canon, courtes, » du calibre de douze et de six, autrement dites pièces de campa- » gne, j'ai conçu l'idée d'établir une théorie sur ces expériences; je crois » y être parvenu : cependant comme je me défie de mes propres forces, » j'offre mon ouvrage à l'examen et à la critique des gens du métier » dont j'accueillerai les observations avec reconnaissance ». Cet ouvrage écrit en français, doit servir de texte aux leçons de l'auteur sur l'application des mathématiques à l'artillerie.

L'auteur nous adresse en ce moment le prospectus de son ouvrage dont voici l'extrait : « Quelque ingénieuses que soient les formules découvertes jusqu'ici par plusieurs auteurs, je ne crains pas de dire qu'il n'en est aucune qui atteigne exactement le but qu'ils se sont proposé; et cela vient de ce qu'ayant toujours, dans l'intégration de la quantité

---

destinent à ces services et qu'on nomme *Cadets,* sont au nombre de soixante. Sont encore admis jusqu'au nombre de quarante, des Cadets pour la cavalerie et l'infanterie, et de douze pour la marine, non compris huit qui peuvent suivre l'instruction à leurs frais : les examens d'admission sont publics et ont lieu le premier avril, à Anvers, pour les aspirans des provinces méridionales, et à Delft pour ceux des provinces septentrionales. La durée et la nature des études diffèrent à raison des services. Nous aurions pu entrer dans beaucoup d'autres détails, grâces à l'extrême obligeance de M. le lieutenant-colonel *Scheer de Lionastre* qui, à notre demande, a bien voulu nous faire une traduction du décret d'organisation de cette Ecole : mais informés qu'elle va subir une réorganisation et un déplacement, nous avons cru qu'il serait inutile de faire connaître dans son entier un état de choses qui va changer.

différentielle, négligé une partie de ce qui devait concourir à la rendre intégrale, ils ont obtenu pour résultat une valeur appartenant à une courbe différente de celle qu'ils cherchaient. Je n'ai, entre autres choses, vu nulle part que l'on ait tenu compte du vide qui se forme derrière le boulet.

Au reste, voici un exemple de la supériorité de ma propre méthode relativement aux anciennes formules. Dans les expériences de 1823, connaissant la vitesse initiale et l'angle de départ au vingt-neuvième coup d'une pièce de douze, et m'étant servi de diverses anciennes formules pour déterminer une des ordonnées quelconques de la trajectoire, qu'en est-il résulté? une différence de près d'un mètre, entre les indications données par l'emploi des formules et les mesures prises à l'expérience; tandis que, d'après ma méthode, la plus grande différence ne s'élève pas tout-à-fait à 9 centimètres.

Dans ma théorie, après avoir, par un des coups de l'expérience, trouvé la vitesse initiale et la supposant constante pour la même pièce et la même charge, je résous plusieurs problèmes, au nombre desquels sont compris ceux-ci :

1.° L'angle d'élévation de la pièce étant donné, trouver la plus grande hauteur de la trajectoire. La manière de résoudre ce problême est très-simple. 2.° La plus grande hauteur de la trajectoire étant donnée, trouver l'angle d'élévation de la pièce. Ce problème sert proprement à faire trouver l'angle de mire pour le tir de but en blanc le plus avantageux. 3.° L'angle d'élévation étant donné, trouver l'angle d'incidence pour un niveau donné. 4.° Trouver la hauteur la plus avantageuse d'une batterie de côte. Enfin, cette Théorie donnera la solution de tous les problêmes relatifs au tir, soit du canon, soit des mortiers.

Des tableaux de rapport sur les mesures prises aux expériences, sont joints à cet ouvrage.

Quand les expériences le permettent, les résultats du calcul sont toujours comparés aux résultats de celles-ci, partout où cela est nécessaire.

L'ouvrage formera un volume in-8.°, accompagné de 18 tableaux d'expériences et de 2 planches gravées sur cuivre. Le prix pour les souscripteurs sera de 3 florins; les non souscripteurs paieront 3 fl 50 cents. La souscription sera fermée lors de la publication de l'ouvrage.

Le prix pour Paris, *franc de port*, sera de 4 florins.

J. G. G.

Propositions de Géométrie à trois dimensions, extraites d'un Mémoire de M. QUETELET, *professeur à l'Athénée de Bruxelles, par M.* HACHETTE. (*Société Philomatique, séance du* 25 *juin* 1825.)

Ces propositions sont extraites d'un mémoire de M. *Quetelet* sur les orbites planétaires. Un exemplaire de ce mémoire m'a été remis il y a quelques jours de la part de l'auteur; j'y ai remarqué les deux propositions suivantes que j'ai l'honneur de communiquer à la Société, en la priant de les transmettre à MM. les rédacteurs du *Bulletin.*

PREMIÈRE PROPOSITION.

On suppose que des paraboles situées dans l'espace, ont un foyer commun et passent par un même point; le lieu géométrique des sommets de ces paraboles, est une surface de révolution qui a pour section méridienne une épicycloïde, et pour axe, la droite menée par les deux points donnés, savoir le foyer et le point communs aux paraboles. Concevant deux cercles qui se touchent d'abord au foyer commun, et qui ont chacun pour diamètre la moitié de la distance des deux points donnés, on fait rouler l'un des cercles sur l'autre, et le point de contact des deux cercles, engendre l'épicycloïde génératrice de la surface de révolution; cette épicycloïde n'a qu'un seul point de rébroussement, qui est le foyer commun des paraboles.

DEUXIÈME PROPOSITION.

On admet que des paraboles situées dans l'espace ont un foyer commun, et que chacune d'elles est touchée par une droite d'un plan donné; dans cette hypothèse, le lieu géométrique des sommets de ces paraboles, est une surface sphérique qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée du foyer commun sur le plan donné.

Au moyen de ces propositions, et par la connaissance de certains nombres déduits de l'observation, M. *Quetelet* détermine, par la méthode des projections, les orbites des comètes. Ceux qui seront curieux de voir d'autres applications de la Géométrie descriptive à la solution de quelques problèmes d'Astronomie, pourront lire les articles que j'ai publiés dans la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique,* tome

I.er, pag. 148, et tom. II, pag. 54. On doit encore à M. *Quetelet,* ce curieux théorème de géométrie :

« Un cône droit étant coupé par un plan, deux sphères dont » chacune est inscrite au cône, touchent le plan en deux points, » qui sont les foyers de la section conique. »

Les propositions suivantes sur les foyers des courbes du second degré se déduisent du théorème de M. *Quetelet* (*).

Les deux foyers d'une courbe du second degré, sont des points qui jouissent de cette propriété, que la somme ou la différence des distances de ces deux points à un point quelconque de la courbe, est une quantité constante. En admettant cette propriété caractéristique des foyers, une courbe du second degré n'a pas seulement deux foyers, elle a une ligne focale, telle que la somme ou la différence des distances d'un point quelconque de la courbe à l'un des foyers, et à un point pris à volonté sur la ligne que j'appelle *focale,* ou sur l'une des branches de cette ligne, est une quantité constante; les deux foyers appartiennent à la ligne focale (**).

La ligne focale d'une ellipse est une hyperbole, et réciproquement la ligne focale d'une hyperbole est une ellipse. La ligne focale d'une parabole ne diffère de la parabole que par sa position : les plans qui contiennent une courbe du second degré et sa ligne focale, sont perpendiculaires entre eux; ils se coupent suivant la droite qui passe par les foyers de l'une et l'autre ligne. L'hyperbole qui est la ligne focale d'une ellipse, a pour foyers les sommets de l'ellipse, et pour sommets, les foyers de cette ellipse. Réciproquement, l'ellipse qui est la ligne focale de l'hyperbole, a pour foyers les sommets de l'hyperbole, et pour sommets, les foyers de cette hyperbole. La parabole et sa focale sont deux lignes identiques qui ne diffèrent que par leurs positions; le sommet de l'une est le foyer de l'autre; elles divergent en sens opposés dans les plans rectangulaires qui les contiennent.

La considération des lignes focales des courbes du second degré,

(*) On pourra sur ce bulletin de la Société Philomatique, que nous devons à l'obligeance de M. *Hachette,* consulter notre Correspondance Mathématiq., pag. 81 — 138 et 267.

A. Q.

(**) Il y a une autre ligne focale qui a été le sujet de recherches fort curieuses de MM. *Quetelet* et *Dandelin.*

fournit un nouveau moyen de construire la parabole par points ou mécaniquement. Comme l'un des foyers de cette courbe est à l'infini, on ne pouvait pas le tracer par la méthode usitée pour les ellipses et pour les hyperboles; mais cette méthode devient applicable à la parabole, par la combinaison du foyer qui est sur l'axe principal, avec le foyer hors de cet axe, pris à volonté sur la parabole focale.

Ces diverses propositions se démontrent synthétiquement et sans calcul.

M. *Demonferrand,* professeur de Mathématiques au Collége de Versailles, a lu, il y a quelques mois, à la Société Philomatique, un mémoire d'application de l'Algèbre à la Géométrie, sur cette question : « Une courbe du second degré étant donnée, trouver le lieu des sommets des cônes droits qui contiennent cette courbe ». Il avait trouvé que ce lieu était la même courbe que nous avons appelée *ligne focale.* Le rapport fait à la Société sur le mémoire de M. *Demonferrand,* est du 15 mai 1825.

⁂ M. *Glosener,* lecteur dans la faculté des sciences de l'Université de Louvain, vient d'être nommé professeur extraordinaire dans la même faculté.

⁂ M. *Verraert* (*Pierre*), promu docteur en sciences à l'Université de Gand, vient d'être nommé professeur de Mathématiques et de Navigation à Ostende.

Questions proposées par la faculté des sciences de l'Université de Groningen.

I.

Desideratur accurata descriptio phænomenorum quæ observantur, si corpus liquidum transeat in statum solidum : addatur ex phænomenis derivata theoria.

II.

Exponantur ea quæ docuit observatio et raciocinium mathematicum de corpore et atmosphæra solari.

Nécrologie.

La ville de Bruges, les sciences et l'instruction primaire viennent de perdre M. *Armand Pelletier*, enlevé à la fleur de l'âge par une maladie longue et cruelle ; fils d'un colonel de génie et élève distingué de l'école Polytechnique, il fut appelé à la chaire de mathématiques de Bruges, lors de la création de l'Athénée de cette ville : l'Université de Gand lui décerna le diplôme de docteur en sciences. Hors d'état, par suite du dépérissement de sa santé, de remplir les fonctions laborieuses du professorat, et frappé des imperfections de l'instruction primaire, telle au moins qu'elle existait à Bruges, il fonda pour l'éducation des jeunes enfans, un établissement qui, en moins de six mois, obtint des résultats qui dépassèrent toutes les espérances : mais la mort vint l'arrêter au milieu de ses honorables travaux. On doit à M. *Pelletier* une géographie élémentaire trop peu connue et qui mérite de l'être; nous connaissons de lui plusieurs recherches mathématiques qu'il se proposait de réunir et de publier.

J. G. G.

QUESTIONS A RÉSOUDRE.

Mathématiques élémentaires.

1.° Inscrire dans un cercle, un rectangle dont l'un des côtés passe par un point donné et soit égal à une ligne donnée.

2.° Inscrire dans un cercle un triangle dont un des côtés passe par un point donné et soit égal à une ligne donnée, et dont un autre côté soit parallèle à une ligne donnée.

N.[a] Le point donné peut être intérieur ou extérieur au cercle (*).

(*) A l'avenir les solutions de ces questions que nous prendrons dans la partie élémentaire de la science, serviront à remplir le titre : *Mathématiques élé-*

Mathématiques transcendantes.

3.° Si on désigne par $M+N\sqrt{-1}$ une des valeurs de la racine n^{me} d'une quantité quelconque réelle positive ou négative $\pm Z$, on aura identiquement

$$\sqrt{M^2+N^2}\sqrt[n]{\pm 1}=\sqrt[n]{\pm Z}$$

les signes supérieurs ayant lieu en même temps dans les deux membres de l'équation, aussi bien que les signes inférieurs.

4.° Un cylindre homogène, plongé verticalement dans un liquide de densité constante que renferme un vase de forme donnée, est supposé en équilibre en vertu d'un contre-poids qui réagit sur lui par le moyen d'une chaîne passée sur une poulie. On demande quelle doit être la courbe que le contre-poids doit parcourir pour que l'équilibre subsiste, quelle que soit la longueur de la partie plongée, ayant égard aussi au frottement du contre-poids contre la courbe sur laquelle il se meut?

---

mentaires: il est presqu'inutile d'observer qu'elles s'adressent particulièrement aux élèves de nos athénées et colléges : les auteurs des questions résolues pourront se procurer ce titre à part, à des conditions qui seront énoncées dans un avertissement en tête de la prochaine livraison qui commencera le IIme volume de la Corr.

FIN DU PREMIER VOLUME.

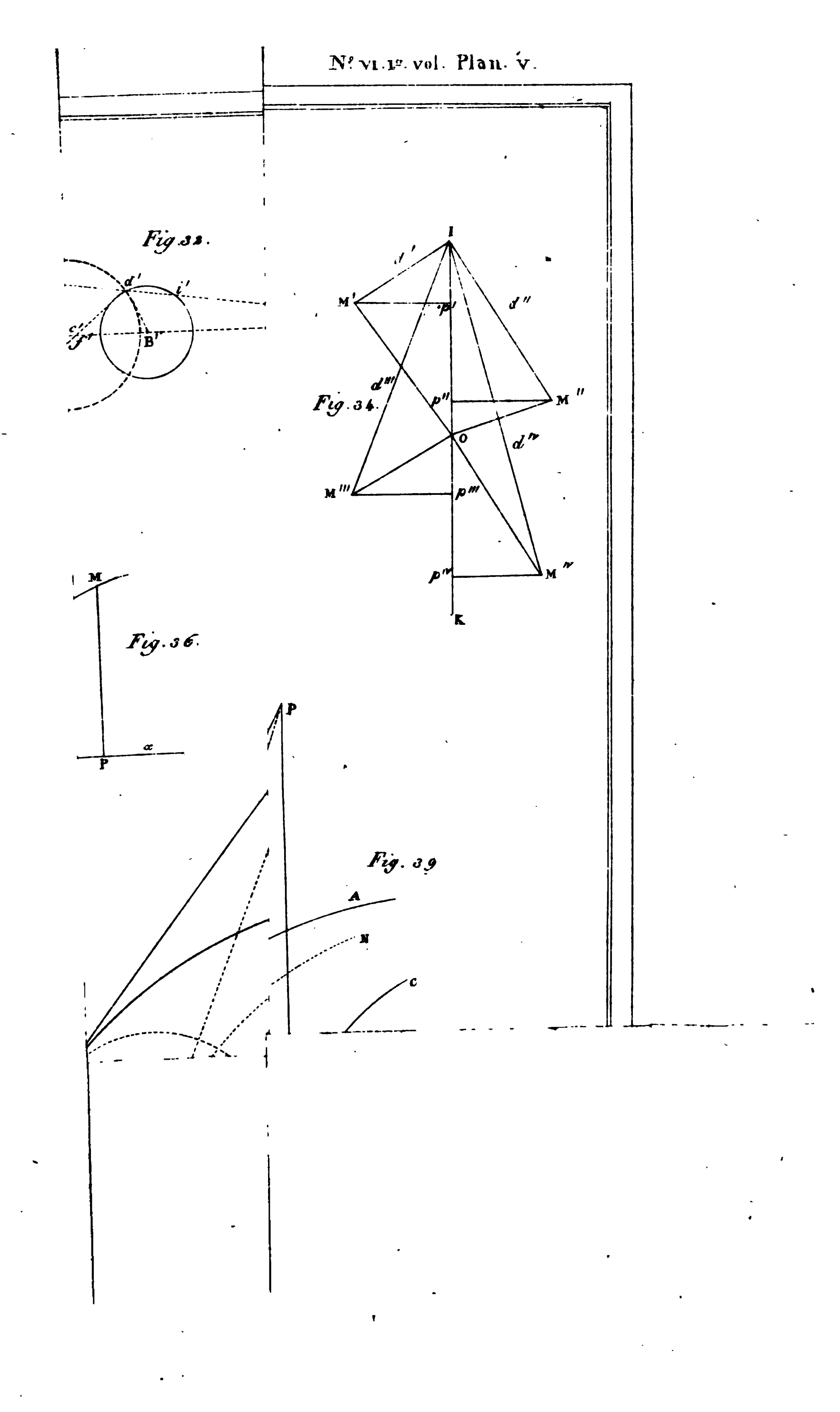


Fig. 32.
d'
i'
B'
Fig. 34.
I
M'
p'
d''
d'''
p''
M''
O
d''''
M'''
p'''
p''''
M''''
K
M
Fig. 36.
P
P
Fig. 39
A
N
C

TABLE GÉNÉRALE

DES MATIÈRES

Contenues dans le premier volume de la CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

ALGÈBRE.

GÉOMÉTRIE.

ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

STATIQUE.

MÉCANIQUE.

Sur les Caustiques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Voyez les énoncés aux pages 32, 112, 176, 252, 310 et 357.
Cinq planches.

FIN DE LA TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES.